Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Roch
Martin Fuchssteiner
Katrin Krohne

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2006 5. Dezember 2006

Analysis III

8. Tutorium mit Lösungshinweisen

(T 1) Reelle Differentiale

Wir identifizieren die reellen Vektorräume $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}^2$ vermöge $z = x + iy$, $x = \mathrm{Re}(z)$,$y = \mathrm{Im}(z)$. Bezeichnet man den Real und den Imaginärteil einer reell differenzierbare Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit u bzw. v, so hat die Jacobimatrix von f die Gestalt

$$J_f := \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$$

Das Bild einer komplexen Zahl unter der Ableitung df ist somit durch $df(h) = J_f(\mathrm{Re}(h), \mathrm{Im}(h))^T$ gegeben.

(a) Zeigen Sie $df(h) = df(1) \cdot \mathrm{Re}(h) + df(i) \cdot \mathrm{Im}(h)$.

(b) Beweisen Sie, da sich die reell lineare Abbildung df in einen komplex linearen und einen komplex antilinearen Anteil zerlegen läßt, d.h. daß es stetige Funktionen λ und μ mit $df(h) = \lambda h + \mu\overline{h}$ gibt.

(c) Beschreiben Sie die Funktionen λ und μ durch die Funktionen u_x, u_y, v_x und v_y.

Lösung:

(a) Da die Ableitung df reell linear ist, gilt

$$df(h) = (1 \cdot \mathrm{Re}(h)) + df(i \cdot \mathrm{Im}(h)) = df(1) \cdot \mathrm{Re}(h) + df(i) \cdot \mathrm{Im}(h).$$

(b) Für die Funktionen $\lambda = \frac{1}{2}(df(1) - idf(i))$ und $\lambda = \frac{1}{2}(df(1) + idf(i))$ gilt $\lambda h + \mu\overline{h} = (\lambda + \mu)\mathrm{Re}(h) + i(\lambda - \mu)\mathrm{Im}(h) = df(1) \cdot \mathrm{Re}(h) + df(i) \cdot \mathrm{Im}(h) = df(h)$.

(c) Aus (a) ergibt sich $\lambda = \frac{1}{2}(u_x + iv_x - iu_y + v_y)$ und $\mu = \frac{1}{2}(u_x + iv_x + iu_y - v_y)$

(T 2) Wirtinger-Kalkül

Wir betrachten wieder die Menge aller reell differenzierbaren Funktionen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Auf dieser Menge definiert man durch

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

die **Wirtinger Ableitungen** $\frac{\partial}{\partial z}$ und $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$. Wie zuvor sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine reell differenzierbare Abbildung.

(a) Zeigen Sie, daß die Wirtinger Ableitungen $\mathbb{C}$-lineare Abbildungen sind.

(b) Beschreiben Sie die Funktionen λ und μ aus Aufgabe T1 durch die Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial z}$ und $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}$.

(c) Beweisen Sie, daß f genau dann holomorph ist, wenn $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ gilt.

LÖSUNG:

(a) Weil die Ableitung $\frac{\partial}{\partial x}$ reell linear ist folgt für $a, b \in \mathbb{R}$: $\frac{\partial (a+ib)f}{\partial x} = a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial(-v+iu)}{\partial x} = a(u_x + iv_x) + b(iu_x - v_x) = (a+bi)(u_x + iv_x) = (a+bi)\frac{\partial f}{\partial x}$ Analoges gilt für die Ableitung nach y. Somit sind auch die Wirtinger Ableitungen komplex linear.

(b) Es gilt $\lambda = \frac{\partial f}{\partial z}$ und $\mu = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}$.

(c) Aus Aufgabe T1 (c) folgt $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \mu = \frac{1}{2}(u_x + iv_x + iu_y - v_y)$. Diese Ableitung veschwindet genau dann wenn die Gleichungen $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$ erfüllt sind, d.h. wenn f holomorph ist.

(T 3) Wirtinger-Kalkül II

Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine reell differenzierbare Funktion und $c \in \mathbb{C}$.

(a) Zeigen Sie $\overline{\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}$.

(b) Beweisen Sie, daß es stetige Funktionen $f_1, f_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gibt, so daß

$$f(z) = f(c) + (z - z)f_1(z) + (\overline{z} - \overline{c})f_2(z)$$

gilt.

(c) Beweisen Sie, daß für die Wirtinger Ableitungen $\frac{\partial}{\partial z}$ bzw. $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$ jeweils die Produk- und die Kettenregel gilt.

(d) Beweisen Sie, daß der Laplace-Operator $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ die folgende Identität erfüllt:

$$\Delta = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}}$$

LÖSUNG:

(a) Es gilt $\overline{\frac{\partial f}{\partial z}} = \overline{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overline{f}}{\partial x} + i\frac{\partial \overline{f}}{\partial y}\right) = \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}$.

(b) Da f reell differenzierbar ist, gibt es eine stetige Funktion $\hat{f}$, so daß die Gleichung

$$f(z) = f(c) + df(c)(\mathrm{Re}(z-c), \mathrm{Im}(z-c)^T + (z-c)\hat{f}(z)$$

gilt. Mit $df(z-c) = \lambda \cdot (z-c) + \mu \cdot (\overline{z-c})$ sowie $f_1(z) = \lambda + \hat{f}(z)$ und $f_2(z) = \mu$ folgt die Behauptung.

(c) Nach (b) gibt es stetige Funktionen f_1, f_2, g_1, g_2 so daß

$$\begin{aligned} f(z) &= f(c) + (z-z)f_1(z) + (\overline{z} - \overline{c})f_2(z) \\ g(z) &= g(c) + (z-z)g_1(z) + (\overline{z} - \overline{c})g_2(z) \end{aligned}$$

gilt. Hieraus folgt

$$\begin{aligned} f(z)g(z) = f(c)g(c) \quad & +(z-c)[f_1(z)g(c) + f(c)g_1(z) + (z-c)f_1(z)g_1(z) + (\overline{z} - \overline{c})f_1(z)g_2(z)] \\ & +(\overline{z} - \overline{c})[f_2(z)g(c) + f(c)g_2(z) + (\overline{z} - \overline{c})f_2(z)g_2(z) + (z-c)f_2(z)g_1(z)]. \end{aligned}$$

Sortiert man dies nach linearen Anteilen in $(z - c)$ bzw $(\overline{z} - \overline{c})$ so ergeben sich die Produktregeln. Die Quotientenregel ist ein Spezialfall der Produktregel und gilt damit auch. Die Kettenregeln ergeben sich analog.

(d) Es gilt $4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}} = \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$. Aus der binomischen Formel folgt nun $4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}} = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} = \Delta$.