7. Tutorium zur Analysis III, Lösungsvorschlag

Einfache Randwertprobleme

Aufgaben

A 1 **(Finde Gegenbeispiele)**
Finde jeweils ein Beispiel für ein Randwertproblem einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung

$$au'' + bu' + cu = 0, \quad u(0) = u_0, \quad u(1) = u_1,$$

welches

(a) keine Lösung besitzt.
(b) mehr als eine Lösung besitzt.

Wir betrachten die Differentialgleichung $u'' = -\pi^2 u$*. Diese hat das Fundamentalsystem* $\{\cos \pi x, \sin \pi x\}$*. Dann gilt für die allgemeine Lösung* $u(x) = \mu \cos \pi x + \lambda \sin \pi x$ *stets* $u(1) = u(0)$*. Ist* $u_0 \neq u_1$*, so kann es keine Lösung geben. Ist aber* $u_0 = u_1$*, so ist* $u(x) = u_0 \cos \pi x + \lambda \sin \pi x$ *für jedes* λ *eine Lösung.*

A 2 **(Die schwingende Saite)**
Eine Saite der Länge π sei in den Punkten 0 und π der x-Achse fest eingespannt. Setzt man sie durch Zupfen in Bewegung, so hat sie im Punkt x zur Zeit t eine Auslenkung $u(x, t)$, welche der partiellen Differentialgleichung.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{mit einer Konstanten } \alpha > 0 \tag{1}$$

genügt. Um diese Gleichung zu lösen, macht man den *Separationsansatz*

$$u(x, t) = v(x)w(t)\,. \tag{2}$$

Wir behaupten nicht, dass jede Lösung diese Gestalt hat – hoffen jedoch, auf diese Art und Weise wenigstens einige (und hoffentlich besonders interessante) Lösungen zu finden. Der Separationsansatz führt auf

$$v(x)\ddot{w}(t) = \alpha^2 v''(x)w(t) \quad \text{bzw.} \quad \frac{\ddot{w}(t)}{w(t)} = \alpha^2 \frac{v''(x)}{v(x)}\,,$$

wobei die Punkte Ableitungen nach t bezeichnen, die Striche Ableitungen nach x. Beachte, dass in letzterer Gleichung die linke Seite unabhängig von x ist, die rechte Seite unabhängig von t. Da beide Seiten gleich sind, sind beide sowohl von x als auch von t unabhängig, also konstant: es gibt ein $\lambda \in \mathbb{R}$ derart, dass

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = -\lambda \quad \text{und} \quad \frac{\ddot{w}(t)}{w(t)} = -\alpha^2 \lambda$$

(die Konstante $-\lambda$ statt λ zu nennen, erweist sich als günstiger für die folgenden Rechnungen). Die Funktionen v und w genügen nach dem Vorigen also den Differentialgleichungen

$$v'' + \lambda\, v = 0 \quad \text{bzw.} \tag{3}$$

$$\ddot{w} + \alpha^2 \lambda\, w = 0\,. \tag{4}$$

Da die Saite an den Stellen $x = 0$ und $x = \pi$ fest eingespannt ist, ist dort keine Auslenkung möglich; es muss also $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ gelten und somit

$$v(0)\, w(t) = v(\pi)\, w(t) = 0$$

für alle t. Wenn wir von dem uninteressanten Fall absehen, dass die Saite völlig in Ruhe ist, also $w(t) = 0$ für alle t, so gibt es mindestens ein t mit $w(t) \neq 0$, und Division führt uns auf die Bedingungen

$$v(0) = v(\pi) = 0\,,$$

welche alle für das beschriebene physikalische Problem relevanten Lösungen v der Differentialgleichung (3) zu erfüllen haben. Dies ist etwas Neues – wir haben hier nicht ein Anfangswertproblem vorliegen, bei dem wir etwa $v(x_0)$ und $v'(x_0)$ vorschreiben – sondern wir haben ein *Randwertproblem*

$$v'' + \lambda v = 0 \quad \text{mit} \quad v(0) = v(\pi) = 0 \tag{5}$$

zu lösen, suchen also Lösungen der Differentialgleichung, welche an vorgeschriebenen Stellen $x_0 = 0$, $x_1 = \pi$ vorgeschriebene Werte $v(x_0)$ und $v(x_1)$ $(= 0)$ annehmen. Wir interessieren uns nur für nicht-triviale Lösungen, es sei also v nicht konstant 0.

(a) Zeige, dass $\lambda \int_0^\pi v(x)^2\,dx > 0$ für jede nicht-triviale Lösung v des Randwertproblems (6) gilt und es daher nur für $\lambda > 0$ nicht-triviale Lösungen geben kann.
[Hinweis: Es gilt $\lambda v^2 = -vv''$].

(b) Es sei $\lambda > 0$ fest vorgegeben. Bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (3).

(c) Berechne, für welche Werte von $\lambda > 0$ ("Eigenwerte") man die in der allgemeinen Lösung aus Teil (b) auftauchenden Konstanten so wählen kann, dass man eine nicht-triviale Lösung das Randwertproblems (6) erhält.

(d) Skizziere die in (c) erhaltenen Lösungen auf $[0, \pi]$ (die so genannten "Eigenlösungen" des Randwertproblems) für die drei kleinsten möglichen Werte von λ.

(e) Bestimme nun noch die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (4) für w und schreibe dann die durch den Separationsansatz $u(x,t) = v(x)w(t)$ gefundenen Lösung der Wellengleichung (1) explizit hin.

Bemerkung 1. Die Lösungen lassen sich als Grundschwingungen und Oberschwingungen der Saite deuten.

(a) Es sei v eine nicht-triviale Lösung des Randwertproblems

$$v'' + \lambda v = 0 \quad \textit{mit} \quad v(0) = v(\pi) = 0\,. \tag{6}$$

Dann gilt $\lambda v = -v''$ und somit

$$\begin{aligned} \lambda \int_0^\pi v(x)^2\,dx &= -\int_0^\pi v(x)v''(x)\,dx = -\left[v(x)v'(x)\right]_{x=0}^{x=\pi} + \int_0^\pi v'(x)^2\,dx \\ &= \underbrace{v(0)}_{=0} v'(0) - \underbrace{v(\pi)}_{=0} v'(\pi) + \int_0^\pi v'(x)^2\,dx = \int_0^\pi v'(x)^2\,dx \end{aligned}$$

wobei wir partiell integriert haben und schliesslich benutzt haben, dass $v(0) = v(\pi) = 0$ wegen (6). Wäre die Funktion v' konstant 0, so wäre v eine konstante Funktion und wegen $v(0) = v(\pi) = 0$ also v konstant 0, was nicht der Fall ist (v ist nicht-trivial). Die stetige Funktion v ist also nicht konstant 0 und somit

$$\lambda \int_0^\pi v(x)^2\,dx = \int_0^\pi v'(x)^2\,dx > 0\,,$$

was $\lambda > 0$ nach sich zieht.

(b) Es ist $v'' + \lambda v = 0$ mit $\lambda > 0$ die Differentialgleichung des harmonischen Oszillators, deren allgemeine Lösung

$$v(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}\,x) + B\sin(\sqrt{\lambda}\,x) \tag{7}$$

(mit $A, B \in \mathbb{R}$) uns bereits bekannt ist (vgl. §2.4, Beispiel F im Skript).

(c) Sei v wie in (7) die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $v'' + \lambda v = 0$. Die Randbedingung $v(0) = 0$ erzwingt $A = 0$. Die Randbedingung $v(\pi) = 0$ liefert weiter

$$v(\pi) = B\sin(\sqrt{\lambda}\,\pi) = 0\,.$$

Ist v nicht trivial, so muss $B \neq 0$ sein, somit $\sin(\sqrt{\lambda}\,\pi) = 0$ sein. Dies gilt genau dann, wenn $\sqrt{\lambda}\,\pi \in \pi\mathbb{Z}$, also $\sqrt{\lambda} \in \mathbb{Z}$. Da $\lambda > 0$ ist, erhalten wir die Bedingung $\sqrt{\lambda} \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Eine nicht-triviale Lösung des Randwertproblems gibt es also nur für $\lambda = n^2$ mit $n = 1, 2, 3, \ldots$

(d)

(e) Wenn $\lambda = n^2$, genügt w der Differentialgleichung $\ddot{w} + \alpha^2 n^2\, w = 0$. Dies ist die Differentialgleichung eines harmonischen Oszillators, mit allgemeiner Lösung

$$w(t) = a\cos(n\alpha t) + b\sin(n\alpha t)\,.$$

Der Separationsansatz $u(x,t) = v(x)\,w(t)$ liefert uns also Lösungen der Wellengleichung der Form $u(x,t) = \sin(nx) \cdot (a\cos(n\alpha t) + b\sin(n\alpha t))$.