Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Roch
Martin Fuchssteiner
Katrin Krohne

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2005 21. November 2006

Analysis III

6. Tutorium mit Lösungshinweisen

(T 1) Zum Aufwärmen: Die Legendre-Transformation

Wir betrachten eine C^2-Abbildung $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \mapsto L(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ und die Abbildung $\mathbf{T} : \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}^{2n+1}$, $(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \mapsto (\mathbf{x}, \frac{\partial L}{\partial v_1}, \dots, \frac{\partial L}{\partial v_n}, t)$.

(a) Zeigen Sie, daß $\mathbf{T}$ im Falle $\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial v_i \partial v_j}\right) \neq 0$ lokal umkehrbar ist, d.h. daß es lokal eine Funktion $\mathbf{G} : \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}^{2n+1}$, mit $\mathbf{G} \circ \mathbf{T} = \mathrm{Id}$ gibt.

(b) Folgern Sie, daß man in diesem Fall neue Koordinaten $y_i = \frac{\partial L}{\partial v_i}$ mit $v_i = G_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ einführen kann. (Diesen Koordinatenwechsel nennt man *Legendre-Transformation*.)

(c) Geben Sie im Fall $n = 3$ und $L(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \frac{1}{2} m \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle - \frac{\mu g}{\|x\|}$, $0 \neq m, \mu, g \in \mathbb{R}$ die Abbildungsvorschriften für $\mathbf{G}$ und $\mathbf{T}$ explizit an.

Lösung:

(a) Für die Abbildung $\mathbf{T}$ gilt

$$\mathrm{d}\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \frac{\partial^2 L}{\partial v_1 \partial v_1} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial v_1 \partial v_n} & \\ & & & \vdots & \ddots & \vdots & \\ & & & \frac{\partial^2 L}{\partial v_n \partial v_1} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial v_n \partial v_n} & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Es folgt $\det(\mathrm{d}\mathbf{T}) = \det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial v_i \partial v_j}\right) \neq 0$. Nach dem Satz vom lokalen Inversen ist $\mathbf{T}$ daher lokal umkehrbar, d.h. es gibt eine Funktion $\mathbf{G} : \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}^{2n+1}$, mit $\mathbf{G} \circ \mathbf{T} = \mathrm{Id}$.

(b) Folgt aus (a).

(c) Es gilt $\frac{\partial L}{\partial v_i} = m v_i$, d.h. $\mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = (\mathbf{x}, m\mathbf{v}, t)$ und $\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = (\mathbf{x}, \frac{1}{m}\mathbf{y}, t)$.

(T 2) Die Hamiltonfunktion

Es sei L eine C^2-Abbildung $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und es gelte $\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial v_i \partial v_j}\right) \neq 0$. Wir führen die Legendre-Transformation wie in T1 durch und definieren die Hamiltonfunktion H:

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) := \langle \mathbf{y}, \mathbf{v} \rangle - L = \langle \mathbf{y}, \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \rangle - L(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t), t)$$

mit $\tilde{\mathbf{G}}_i := \mathbf{G}_{n+i}$ für $i = 1, \dots, n$.

(a) Zeigen Sie $\frac{\partial H}{\partial x_i} = -\frac{\partial L}{\partial x_i}$ und $\frac{\partial H}{\partial y_i} = \tilde{G}_i$.

(b) Geben Sie die Hamiltonfunktion im Fall $n = 3$ und $L(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \frac{1}{2}m\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle - \frac{\mu g}{\|x\|}$, an.

LÖSUNG:

(a) Aus der Definition der Hamiltonfunktion folgt $\frac{\partial H}{\partial x_i} = 0 - \frac{\partial L}{\partial x_i} = -\frac{\partial L}{\partial x_i}$ und $\frac{\partial H}{\partial y_i} = v_i - 0 = \tilde{G}_i$.

(b) $H(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \langle \mathbf{y}, \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)\rangle - L(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t), t) = \frac{1}{2m}\langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle + \frac{\mu g}{\|x\|}$.

(T 3) Die Euler-Lagrange- und die Hamilton-Gleichungen

Es sei L eine C^2-Abbildung $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und es gelte $\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial v_i \partial v_j}\right) \neq 0$. Wir ordnen jedem differenzierbaren Weg $\mathbf{x} \in C^2([0,1], \mathbb{R}^n)$ den Weg $t \mapsto (\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t), t)$ im $\mathbb{R}^{2n+1}$ zu und betrachten die *Euler-Lagrange-Gleichungen*

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0.$$

(a) Es sei $\mathbf{x}(t)$ eine Lösung der Euler-Lagrange-Gleichungen und $y_i(t) = \frac{\partial L}{\partial v_i}(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t), t)$. Zeigen Sie $\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial y_i}$, $\dot{y}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$. (Benutzen Sie Ihre Kenntnisse aus T1 und T2.)

(b) Zeigen Sie, daß die Legendre-Transformation die Euler-Lagrange-Gleichungen ein DGLn-System 1. Ordnung, die *Hamilton-Gleichungen*

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \dot{y}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$$

überführt.

(c) Führt eine weitere Legendre-Transformation (mit H an Stelle von L) wieder auf die ursprünglichen Koordinaten und die Euler-Lagrange-Gleichungen?

LÖSUNG:

(a) Es sei $\mathbf{x}(t)$ eine Lösung der Euler-Lagrange-Gleichungen und $y_i(t) = \frac{\partial L}{\partial v_i}(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t), t)$. Aus Aufgabe T2 (b) folgt $\dot{x}_i = v_i = \frac{\partial H}{\partial y_i}$. Aus den Euler-Lagrange-Gleichungen folgt $\dot{y}_i = \dot{\left(\frac{\partial L}{\partial v_i}\right)} = \frac{\partial L}{\partial x_i} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$.

(b) Aus (a) wissen wir, daß die Legendre-Transformation für jede Lösung der Euler-Lagrange-Gleichungen eine Lösung der Hamilton-Gleichungen ergibt. Sei umgekehrt $(\mathbf{x}, \mathbf{y})(t)$ eine Lösung der Hamilton-Gleichungen. Nach T2 (a) gilt $\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial y_i} = G_i = v_i$. Weiterhin gilt $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_i} = \dot{y}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i}$.

(c) Ja

(T 4) Die Euler-Lagrange-Gleichungen II

Es sei $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wieder eine C^2-Abbildung und die Koordinatenbezeichnungen $(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ wie oben. Wir betrachten das *Wirkungsintegral* $I : C^1([0,1], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, $\gamma \mapsto \int_0^1 L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t)\, dt$.

(a) Geben Sie die Ableitung des Wirkungsintegrals am Punkt γ in Richtung eines Weges η durch η und die Ableitungen von L und η an.

(b) Zeigen Sie, daß sich für $\eta(0) = \eta(1) = 0$ die Gleichung

$$dI(\gamma)(\eta) = \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_i}\right) \eta_i \, dt$$

ergibt. Folgern Sie, daß am Punkt γ die Ableitung $dI(\gamma)(\eta)$ von I in alle Richtungen η mit $\eta(0) = \eta(1) = 0$ genau dann verschwindet, wenn γ die Euler-Lagrange-Gleichungen erfüllt.

(c) Es seien $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^n$ gegeben und $A = \{\gamma \in C^2([0,1], \mathbb{R}^n \mid \gamma(0) = \mathbf{x}_0 \text{ und } \gamma(1) = \mathbf{x}_1\}$ der affine Teilraum aller C^2-Wege von $\mathbf{x}_0$ nach $\mathbf{x}_1$. Zeigen Sie, daß $\gamma \in A$ die Euler-Lagrange-Gleichungen erfüllen muß damit $I_{|A}$ bei γ einen Extremalpunkt haben kann.

Lösung:

(a) Da das Integral ein lineares Funktional ist, gilt

$$\frac{I(\gamma + s\eta) - I(\gamma)}{s} = \int_0^1 \frac{L(\gamma(t) + s\eta(t), \dot\gamma(t) + s\dot\eta(t), t)}{s}.$$

Weil der Integrationsbereich kompakt ist, vertauschen Integral und Grenzwert (siehe Analysis II). Mit der Kettenregel ergibt sich

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to 0} \frac{I(\gamma + s\eta) - I(\gamma)}{s} &= \int_0^1 \lim_{s\to 0} \frac{L(\gamma(t) + s\eta(t), \dot\gamma(t) + s\dot\eta(t), t) - L(\gamma(t), \dot\gamma(t), t)}{s}\, dt \\
&= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial x_i}(\gamma(t), \dot\gamma(t), t) \cdot \eta_i(t) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial v_i}(\gamma(t), \dot\gamma(t), t) \cdot \dot\eta_i(t)\, dt.
\end{aligned}$$

(b) Für $\eta(0) = \eta(1) = 0$ und partieller Integration ergibt sich für die 2. Summe unter dem Integral

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial v_i}(\gamma(t), \dot\gamma(t), t) \cdot \dot\eta_i(t)\, dt &= \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial v_i}(\gamma(t), \dot\gamma(t), t)\eta(t)\right]_0^1 - \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_i}\eta_i\, dt \\
&= 0 - \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_i}\eta_i\, dt.
\end{aligned}$$

Hiermit ergibt sich die Ableitung $dI(\gamma)(\eta)$ am Punkt γ in Richtung η zu

$$dI(\gamma)(\eta) = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_i}\right)\eta_i\, dt$$

Dieses Integral verschwindet genau dann für alle η mit $\eta(0) = \eta(1) = 0$, wenn γ die Euler-Lagrange-Gleichungen erfüllt.

(c) Wenn $I_{|A}$ bei $\gamma \in A$ einen Extremalpunkt haben soll, muß am Punkt γ die Ableitung $dI(\gamma)(\eta)$ in jede Richtung η mit $\eta(0) = \eta(1) = 0$ verschwinden und γ somit die Euler-Lagrange-Gleichungen erfüllen.