5. Tutorium zur Analysis III, Lösungsvorschlag

Operatorhalbgruppen in $\mathbb{R}^n$

Definition. Eine stetige Operatorhalbgruppe im $\mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung $T : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, für die gilt

1. $T \in C(\mathbb{R}^+, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n))$.
2. $T(0) = Id$.
3. $T(s+t) = T(s) \cdot T(t)$ für alle $s, t \in \mathbb{R}^+$.

Operatorhalbgruppen in unendlich dimensionalen Räumen sind komplizierte Objekte und Gegenstand aktueller Forschung. Sie haben weitreichende Anwendung in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen.

In endlich dimensionalen Räumen jedoch lässt sich jede solche Halbgruppe darstellen als $T(t) = e^{At}$ mit einer geeigneten Matrix A. Dies wollen wir in diesem Tutorium zeigen.

Aufgaben

A 1 (Die Neumann-Reihe)
Beweise: Für jedes $B \in L(\mathbb{R}^n)$ mit $\|B\| < 1$ ($\|\cdot\|$ die Operatornorm), ist $(Id - B)$ stets invertierbar mit der Inversen $\sum_{k=0}^{\infty} B^k$.

Wegen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|B^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|B\|^k < \infty$$

ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} B^k$ absolut konvergent, also konvergent.

Außerdem gilt

$$(Id - B)\sum_{k=0}^{\infty} B^k = \sum_{k=0}^{\infty} B^k - \sum_{k=0}^{\infty} B^{k+1} = Id.$$

A 2 (Operatorhalbgruppen in $\mathbb{R}^n$)
Sei $T : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ eine stetige Operatorhalbgruppe. Zeige, dass ein eindeutig bestimmtes $A \in L(\mathbb{R}^n)$ existiert mit

$$T(t) = e^{tA} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}^+.$$

Anleitung:

(i) Zeige, dass

$$\left\| Id - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} T(s)ds \right\| < 1$$

für ein hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ und folgere, dass $\int_0^{\varepsilon} T(s)ds$ invertierbar ist (das Integral ist hier Komponentenweise erklärt).

(ii) Zeige, dass

$$\psi(h) := \int_0^{\varepsilon} T(s+h)ds$$

differentzierbar ist.

(iii) Betrachte $\frac{T(h)-Id}{h}\int_0^{\varepsilon} T(t)dt$, um die Differenzierbarkeit von T in 0 zu zeigen.

(iv) Zeige, dass T differenzierbar ist und eine geeignete Differentialgleichung erfüllt.

(v) Folgere nun die Behauptung.

Beweis. *Da T stetig ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $\|T(t) - T(0)\| < \delta < 1$, falls $|t - 0| < \varepsilon$. Daraus folgt*

$$\|Id - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} T(s)ds\| = \|\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} T(s) - T(0)ds\| \leq \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} \|T(s) - T(0)\|ds < \delta < 1.$$

Somit ist nach A1 $\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon T(s)ds$ *und auch* $\int_0^\varepsilon T(s)ds$ *invertierbar. Wir setzen*

$$\psi(h) := \int_0^\varepsilon T(s+h)ds.$$

Wegen

$$\psi(h) = \int_0^{h+\varepsilon} T(s)ds - \int_0^h T(s)ds$$

ist ψ *differenzierbar nach dem 1. Hauptsatz der Differential und Integralrechnung. Weiterhin gilt*

$$\frac{T(h)-T(0)}{h}\int_0^\varepsilon T(s)ds = \frac{1}{h}\left(\int_0^\varepsilon T(s+h)ds - \int_0^\varepsilon T(s)ds\right) \xrightarrow{h\to 0} \psi'(0).$$

Somit folgt, weil $\int_0^\varepsilon T(s)ds$ *differenzierbar ist, dass auch* $T(t)$ *in 0 differenzierbar ist mit* $T'(0) = \psi'(0)\left(\int_0^\varepsilon T(s)ds\right)^{-1}$*. Es gilt*

$$\frac{T(h+t)-T(t)}{h} = T(t)\frac{T(h)-T(0)}{h} \xrightarrow{h\to 0} T(t)T'(0).$$

Also ist T *überall differenzierbar mit* $T'(t) = T(t)T'(0)$*. Nun ist wegen Satz 4.3. die Funktion* $\Phi : t \mapsto e^{tT'(0)}$ *eine Lösung der Differentialgleichung*

$$y'(t) = y(t)T'(0),$$

und weil die Abbildung $L(\mathbb{R}^n) \ni y \mapsto yT'(0) \in L(\mathbb{R}^n)$ *auf ganz* $L(\mathbb{R}^n)$ *Lipschitz stetig ist, folgt aus der Eindeutigkeit der Lösung mit dem Anfangswert* $y(0) = Id$

$$T(t) = e^{tT'(0)} = e^{tA}.$$

Wegen $A = T'(0)$ *ist diese Matrix eindeutig bestimmt.*

A 3 (Operatorgruppen)
Zeige, dass sich jede stetige Operatorhalbgruppe in $\mathbb{R}^n$ zu einer Operatorgruppe fortsetzen lässt, das heißt zu einer stetigen Abbildung $T : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, die die Eigenschaften 1. bis 3. für alle $t \in \mathbb{R}$ erfüllt.

Für $t < 0$ *setzen wir auch* $T(t) := e^{tA}$.

Orientierungskolloquium

Die Forschungsgebiete des Fachbereichs Mathematik stellen sich vor.

Montag, 20.11.2006 – 16:15-17:15 Uhr – S103/123

Prof. Dr. Regina Bruder

FG Didaktik

„Zwischen ‚Mathematik verstehen‘ und den Bildungsstandards: Was will und kann die Mathematikdidaktik?“

Nach dem Vortrag gibt es ein gemütliches Treffen in S215/219, um über den Vortrag zu reden und die Vortragenden näher kennenzulernen.