Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Roch
Martin Fuchssteiner
Katrin Krohne

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2006 6. November 2006

Analysis III

4. Tutorium mit Lösungshinweisen

(T 1) Ein Beispiel

Wir betrachten die Schar konzentrischer Kreise in $\mathbb{R}^2$, welche implizit durch $x^2 + y^2 = r^2$, $(r > 0)$ gegeben sind.

(a) Stelle eine Differentialgleichung auf, welche die Kreislinien für $-r < x < r$ beschreibt.

(b) Welche Probleme treten auf, wenn man die gesamte Kreislinie $x^2 + y^2 = r^2$ als Lösung einer Differentialgleichung schreiben will?

Lösung:

(a) Es gilt $x^2 + y^2 = r^2$. Das Ableiten dieser Gleichung nach x ergibt $2x + 2yy' = 0$ bzw. $y' + \frac{x}{y} = 0$.

(b) Man kann keine DGL in y aufstellen, deren Lösung die gesamte Kreislinie $x^2 + y^2 = r^2$ beschreibt, weil mit $y(x)$ auch $-y(x)$ vorkommen müßte.

(T 2) Exakte Differentialgleichungen

(a) Suchen Sie eine differenzierbare Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, so daß die Kreislinien aus obiger Aufgabe Niveaulinien von F sind und skizzieren Sie das Vektorfeld ∇F.

(b) Geben Sie eine Parametrisierung $(x(t), y(t))$ einer Niveaulinie von F an und skizzieren Sie deren Tangentialvektoren.

(c) Welche geometrische Beziehung besteht zwischen den Tangentialvektoren $(\dot{x}, \dot{y})$ und dem Vektorfeld ∇F?

(d) Zeigen Sie, daß die Funktionen x und y der Differentialgleichung $\frac{\partial F}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial F}{\partial y}\dot{y} = 0$ genügen. Setzen Sie $x = t$ und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit T1 a)

Lösung:

(a) Die gesuchte Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist $F(x, y) = x^2 + y^2$. Das Vektorfeld ∇F ist ein Zentralfeld.

(b) Eine mögliche Parametrisierung ist $(x(t), y(t)) = r(\cos t, \sin t)$. Die Tangentialvektoren sind tangential am Kreis $x^2 + y^2 = r^2$.

(c) Die Tangentialvektoren stehen auf dem Zentralfeld ∇F senkrecht.

(d) Es gilt $x(t)^2+y(t)^2 = r^2$, d.h. $F(x(t), y(t)) = 0$. Die Ableitung nach t ergibt $\frac{\partial F}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial F}{\partial y}\dot{y} = 0$. Setzt man hier $x = t$ so erhält man $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}y' = 0$ bzw. $2x + 2yy' = 0$ oder $y + \frac{x}{y} = 0$ für $y \neq 0$.

(T 3) Exakte Differentialgleichungen II

Definition: Eine Differentialgleichung der Form $g(x,y)\dot{x} + h(x,y)\dot{y} = 0$ heißt *exakt*, wenn es eine differenzierbare Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\frac{\partial F}{\partial x} = g$ und $\frac{\partial F}{\partial y} = h$ gibt.

Im folgenden sei $g(x,y)\dot{x} + h(x,y)\dot{y} = 0$ eine exakte Differentialgleichung mit $\frac{\partial F}{\partial x} = g$, $\frac{\partial F}{\partial y} = h$ und es gelte immer $(g(x,y), h(x,y)) \neq (0,0)$. Zeigen Sie, daß y genau dann eine Lösung der Differentialgleichung $g(x,y) + h(x,y)y'(x) = 0$ ist, wenn y eine Niveaulinie von F beschreibt.

Lösung:

Falls y eine Lösung der DGL $g(x,y) + h(x,y)y'(x) = 0$ ist, so folgt $\frac{d}{dx}F(x,y(x)) = g(x,y) + h(x,y)y'(x) = 0$, d.h. $F(x,y(x)) = r = \text{const}$.

(Aus der Bedingung $(g(x,y), h(x,y)) \neq (0,0)$ folgt mit dem Satz über implizite Funktionen die Existenz einer eindeutigen Funktion $z = z(x)$ mit $F(x,z(x)) = r$. Die Lösung y der DGL ist dann genau diese Funktion z und beschreibt eine Niveaulinie.)

Beschreibt umgekehrt $y = y(x)$ eine Niveaulinie, so gilt $F(x,y(x)) = r = \text{const}$. Ableiten nach x ergibt $\frac{d}{dx}F(x,y(x)) = g(x,y) + h(x,y)y'(x) = 0$.

(T 4) Eulersche Multiplikatoren

Wir betrachten die Differentialgleichung $y(x) + 2xy'(x) = 0$.

(a) Ist diese DGL exakt?

(b) Finden Sie eine fifferenzierbare Funktion $\lambda : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, so daß die Differentialgleichung $\lambda(x,y(x))y(x) + \lambda(x,y(x))2xy'(x) = 0$ exakt ist.

Hinweis: Es gibt eine solche Funktion λ, welche in diesem Beispiel nur von einem Argument abhängt.

(c) Lösen sie nun die exakte DGL indem Sie T3 benutzen.

Lösung:

(a) Es gilt $\frac{\partial y}{\partial y} = 1 \neq 2 = \frac{\partial 2x}{\partial x}$. Diese DGL ist daher nicht exakt.

(b) Eine solche Funktion ist z.B. $\lambda(x,y) = y$. Die DGL $y(x)^2 + 2xy(x)y'(x) = 0$ ist dann exakt.

(c) Mit dem Eulerschen Multiplikator λ folgt für $g(x,y) = y^2$ und $h(x,y) = 2xy$ die Existenz von $F(x,y) = y^2x + c$ mit $\frac{\partial F}{\partial x} = g$ und $\frac{\partial F}{\partial y} = h$. Aus $F(x,y(x)) = r = \text{const}$ folgt $y(x) = \frac{c}{\sqrt{x}}$ für $x > 0$.