3. Tutorium zur Analysis III, Lösungsvorschlag

Die Ungleichung von Gronwall und stetige Abhängigkeit von den Anfangwerten

Der Satz von Picard-Lindelöf garantiert (unter geeigneten Voraussetzungen) lokal eine eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$(\#) \quad \begin{array}{llll} \dot{y} = f(t,y) & , & f : J \times D \to \mathbb{R}^n \text{ stetig}\,, & J \subset \mathbb{R} \text{ offenes Intervall} \\ y(t_0) = y_0 & , & (t_0, y_0) \in J \times D\,, & D \subset \mathbb{R}^n \text{ offen.} \end{array}$$

Für die Praxis ist es nun von eminenter Bedeutung, ob die Lösung y *stark* - vielleicht zu stark - variiert, wenn man die rechte Seite f und den Anfangswert y_0 nur *wenig* ändert.
Oder ist es nicht vielmehr so, dass y "stetig" von diesen Ausgangsdaten abhängt, *kleine* Änderungen von f und y_0 sich nur *geringfügig* auf y auswirken (man denke nur an Mess- und Idealisierungsfehler; wünschenswert ist, dass die *errechnete* Lösung nicht allzuweit von dem *realen* Vorgang abweicht).
Bei vielen Fragen der stetigen Abhängigkeit von Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen von Anfangswerten und Parametern spielt folgende Ungleichung eine fundamentale Rolle.

Aufgaben

A 1 Ungleichung von Gronwall.
Sei I ein Intervall in $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$ und seien $\varphi, \psi, w \in C(I)$ nicht-negative, stetige Funktionen auf I. Gilt

$$(*) \qquad w(t) \leq \varphi(t) + \left| \int_{t_0}^{t} \psi(s) w(s) ds \right| \qquad \text{für alle } t \in I\,,$$

so folgt

$$(**) \qquad w(t) \leq \varphi(t) + \left| \int_{t_0}^{t} \varphi(s)\psi(s) \exp\left(\left| \int_{s}^{t} \psi(\sigma) d\sigma \right| \right) ds \right|$$

für alle $t \in I$. Falls $t > t_0$, so können die Betragsstriche weggelassen werden. Wir wollen die Ungleichung von Gronwall beweisen. Gehe dazu wie folgt vor.

1. Betrachte zunächst den Fall $t > t_0$. Setze $v(t) := \int_{t_0}^{t} \psi(s) w(s) ds$ und zeige, dass
$$\frac{d}{dt} v(t) \leq \varphi(t)\psi(t) + \psi(t) v(t)$$
gilt.
2. Folgere, dass
$$\frac{d}{dt}(\chi v) \leq \varphi\psi\chi \quad \text{für} \quad \chi(t) := \exp\left(- \int_{t_0}^{t} \psi(s) ds \right)$$
gilt.
3. Folgere
$$v(t) \leq \int_{t_0}^{t} (\varphi\psi)(s) \frac{\chi(s)}{\chi(t)} ds$$
und wende nun die Voraussetzung an.
4. Folgere das Resultat für $t < t_0$, indem Du jede der Funktionen $g = \varphi, \psi, w$ durch die an t_0 gespiegelte Funktion $\tilde{g}(t) := g(2t_0 - t)$ ersetzt.

Setze $v(t) := \int\limits_{t_0}^{t} \psi(s)w(s)ds$.

Dann folgt aus $(*)$ *für* $t > t_0$, $t \in I$,

$$\frac{d}{dt}v(t) \equiv \dot{v}(t) = \psi(t)w(t) \leq \varphi(t)\psi(t) + \psi(t)v(t) \, .$$

Multiplizieren wir diese Ungleichung mit

$$\chi(t) := \exp\,(-\int\limits_{t_0}^{t} \psi(s)ds) \, ,$$

so erhalten wir wegen $\dot{\chi} = -\psi\chi$

$$\chi\dot{v} \leq \varphi\psi\chi - \dot{\chi}v \, , \quad \text{also } \frac{d}{dt}(\chi v) \leq \varphi\psi\chi \, .$$

Integration nach t *liefert daher*

$$(\chi v)(t) - (\chi v)(t_0) \leq \int\limits_{t_0}^{t} (\varphi\psi\chi)(s)ds \, .$$

Da $v(t_0) = 0$ *und* $\chi(t) > 0$, *folgt*

$$v(t) \leq \int\limits_{t_0}^{t} (\varphi\psi)(s)\frac{\chi(s)}{\chi(t)}ds \, ,$$

also, zusammen mit $(*)$,

$$w(t) \leq \varphi(t) + v(t) \leq \varphi(t) + \int\limits_{t_0}^{t} \varphi(s)\psi(s)\exp(\int\limits_{s}^{t} \psi(\sigma)d\sigma) \, .$$

Der Fall $t < t_0$ *läßt sich auf den Fall* $t > t_0$ *zurückführen, indem jede der Funktionen* $g = \varphi, \psi, w$ *durch die an* t_0 *gespiegelte Funktion* $\tilde{g}(t) := g(2t_0 - t)$ *ersetzt wird. Wir betrachten nun* $t < t_0$. *Dann ist* $g(t) = \tilde{g}(2t_0 - t)$ *und* $2t_0 - t > t_0$. *Wir zeigen nun, dass* $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{w}$ *die Voraussetung* $(\star)$ *für* $t > t_0$ *erfüllen. Es ist*

$$\tilde{w}(t) = w(2t_0 - t) \leq \varphi(2t_0 - t) + |\int\limits_{t_0}^{2t_0 - t} \psi(s)w(s)ds| = \tilde{\varphi}(t) + |\int\limits_{t_0}^{t} \tilde{\psi}(x)\tilde{w}(x)dx|$$

mit der Substitution $2t_0 - x = s$. *Also erhalten wir nach dem ersten Teil*

$$\tilde{w}(t) \leq \tilde{\varphi}(t) + \Big|\int\limits_{t_0}^{t} \tilde{\varphi}(s)\tilde{\psi}(s)\exp(|\int\limits_{s}^{t} \tilde{\psi}(\sigma)d\sigma|)ds\Big|,$$

also

$$w(2t_0 - t) \leq \varphi(2t_0 - t) + \Big|\int\limits_{t_0}^{t} \tilde{\varphi}(s)\tilde{\psi}(s)\exp(|\int\limits_{2t_0 - s}^{t} \psi(\eta)d\eta|)ds\Big|$$

$$\leq \varphi(2t_0 - t) + \Big|\int\limits_{t_0}^{2t_0 - t} \varphi(x)\psi(x)\exp(|\int\limits_{x}^{2t_0 - t} \psi(\eta)d\eta|)dx\Big|$$

durch die Substitutionen $2t_0 - \eta = \sigma$ *und* $2t_0 - x = s$, *was die Behauptung liefert.*

A 2 Folgerung 1 zur Gronwall Ungleichung.
Beweise:
Gilt $\varphi(t) = \varphi_0(|t-t_0|)$, wobei $\varphi_0 : [0,\infty) \to [0,\infty)$ monoton wachsend sei, so folgt aus

$$(*) \qquad w(t) \le \varphi(t) + \left| \int_{t_0}^{t} \psi(s)w(s)ds \right| , \quad t \in I ,$$

die Abschätzung

$$w(t) \le \varphi(t)\exp\left(\left| \int_{t_0}^{t} \psi(s)ds \right| \right) , \quad t \in I.$$

O. B. d. A. sei wieder $t > t_0$. Da $\varphi(s) \le \varphi(t)$ für $t_0 \le s \le t$, so folgt aus $(**)$

$$\begin{aligned} w(t) &\le \varphi(t)\Big(1 + \int_{t_0}^{t} \psi(s)\exp(\int_{s}^{t} \psi(\sigma)d\sigma)ds\Big) \\ &= \varphi(t)\Big(1 - \int_{t_0}^{t} \tfrac{d}{ds}\Big[\exp(\int_{s}^{t} \psi(\sigma)d\sigma)\Big]ds\Big) = \varphi(t)\exp(\int_{t_0}^{t} \psi(\sigma)d\sigma) \end{aligned}$$

A 3 Folgerung 2 (stetige Abhängigkeit der Lösung von den Anfangswerten).
Sei $f : J \times D \to \mathbb{R}^n$ stetig und genüge bezüglich y einer Lipschitzbedingung

$$\|f(t,y) - f(t,y^*)\| \le L\|y - y^*\|$$

bzüglich einer Norm $\|\cdot\|$ auf dem $\mathbb{R}^n$ für alle $t \in J \subset \mathbb{R}$, $y, y^* \in D \subset \mathbb{R}^n$.

Zeige:
Sind dann $u : J_u \to D$ sowie $v : J_v \to D$ Lösungen der Differentialgleichung $\dot{y} = f(t,y)$ (im Gegensatz zum AWP (#) verlangen wir hier nicht, daß $y(t_0)$ vorgegeben ist), so gilt für jedes $t_0 \in J_u \cap J_v$

$$\|u(t) - v(t)\| \le \|u(t_0) - v(t_0)\|e^{L|t-t_0|}$$

für alle $t \in J_u \cap J_v$.
Tipp: Beachte, dass

$$u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s,u(s))ds$$

für eine Lösung u der Dgl. $\dot{y} = f(t,y)$ gilt.

Wir setzen

$$Tu(t) := u(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s,u(s))ds.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} \|u(t) - v(t)\| &= \|Tu(t) - Tv(t)\| \\ &\le \|u(t_0) - v(t_0)\| + |\int_{t_0}^{t} \|f(s,u(s)) - f(s,v(s))\|ds| \\ &\le \|u(t_0) - v(t_0)\| + L|\int_{t_0}^{t} \|u(s) - v(s)\|ds| \,. \end{aligned}$$

Wählen wir nun $\varphi(t) = \|u(t_0) - v(t_0)\|$ und $\psi(s) = L$, so gibt die Folgerung 1 zur Gronwall Ungleichung gerade die Behauptung.