Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Roch
Martin Fuchssteiner
Katrin Krohne

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2005 6. November 2006

Analysis III

2. Tutorium mit Lösungshinweisen

(T 1) Vektorfelder und Richtungsfelder

Wir betrachten die DGL $y' = \tan y$.

(a) Skizzieren Sie das Richtungsfeld.

(b) Ist dieses Richtungsfeld ein Vektorfeld? (Wenn ja, geben sie die Abbildungsvorschrift an. Wenn nicht, wie können Sie daraus ein Vektorfeld machen?)

(c) Sind Vektorfelder immer Richtungsfelder oder Richtungsfelder immer Vektorfelder?

(d) Lösen sie obige DGL durch Trennung der Variablen. Können Sie hier den Satz von Picard-Lindelöf anwenden?

Lösung:

(a)

(b) Ja, dieses Richtungsfeld ist ein Vektorfeld. Die Abbildungsvorschrift ist $R(x, y) = (1, y'(x)) = (1, \tan y)$.

(c) Nein, Vektorfelder sind nicht immer Richtungsfelder, da die erste Komponente nicht normiert sein muß. Richtungsfelder sind jedoch immer Vektorfelder.

(d) Eine Trennung der Variablen liefert $\frac{y'}{\tan y} = \frac{y' \cos y}{\sin y} = 1$ und somit $\ln(\sin y(x)) = x + c$ bzw. $y(x) = \arcsin(\exp(x + c))$ für $c \in \mathbb{R}$.

(T 2) Vektorfelder und Differentialgleichungen

Wir betrachten die DGL $y'(x) = f(x, y(x)) = xe^{-y(x)}$.

(a) Wie können Sie eine Lösung dieser DGL als Integralkurve eines Vektorfeldes $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ verstehen? Wie läßt sich dieses Vektorfeld F durch die Funktion f beschreiben?

(b) Skizzieren sie das Vektorfeld F und lösen Sie die DGL.

Lösung:

(a) Ist y eine Lösung der DGL, so ist für $x(t) = t$ und $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ die DGL $\dot\gamma(t) = (\dot x(t), y(t)) = (1, f(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ erfüllt. Somit ist $t \mapsto (t, y(t))$ bzw. $x \mapsto (x, y(x))$ eine Integralkruve des Vektorfeldes $F(x, y) = (1, f(x, y))$.

(b) Eine Trennung der Variablen liefert $e^y y' = x$. Durch Integration nach x erhält man $e^y = \frac{1}{2}x^2 + c$ bzw. $y(x) = \ln(\frac{1}{2}x^2 + c)$.

(T 3) Potentiale und Gradientenfelder

Wir betrachten das Vektorfeld $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $V(x, y, z) = \frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}(x, y, z)$.

(a) Wann nennt man ein Vektorfeld ein Gradientenfeld? Ist das Vektorfeld V ein Gradientenfeld? Ist es rotationssymmetrisch oder ein Zentralfeld?

(b) Berechnen Sie $\frac{\partial V_1}{\partial x}$, $\frac{\partial V_2}{\partial y}$ und $\frac{\partial V_3}{\partial z}$. Ist die Funktion $F(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ ein *Potential* d.h. gilt $\Delta F = 0$?

(c) Durch Transformation der DGL $\ddot{s}(t) = -V(s(t))$ in Kugelkoordinaten erhält man die DGL $\ddot{r}(t) = -\frac{-1}{r(t)^2}$. Lösen sie diese DGL mit dem Ansatz $r(t) = a \cdot (b \pm t)^c$ $(c \in \mathbb{N})$.

LÖSUNG:

(a) Ein Vektorfeld F heißt *Gradientenfeld*, wenn es Gradient einer differenzierbaren Funktion F ist: $V = \nabla F$. Das hier gegebene Vektorfeld V ist sowohl ein Gradientenfeld $(F(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ als auch rotationssymmetrisch.

(b) Für die erste Ableitung ergibt sich
$\frac{\partial V_1}{\partial x} = \frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3} + \frac{3}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^4}\frac{2x^2}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{3x^2-(x^2+y^2+z^2)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^5}$. Analog folgt
$\frac{\partial V_2}{\partial y} = \frac{3y^2-(x^2+y^2+z^2)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^5}$ und
$\frac{\partial V_3}{\partial z} = \frac{3z^2-(x^2+y^2+z^2)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^5}$. Es folgt $\Delta F = \frac{\partial V_1}{\partial x}\frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z} = \frac{3x^2+3y^2+3z^2-3(x^2+y^2+z^2)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^5} = 0$, d.h. die Funktion $V(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ ist ein ein *Potential*.

(c) Der Ansatz $s(t) = a \cdot (b \pm t)^c$ liefert die Gleichungen $\dot{s}(t) = \pm ac(b \pm t)^{c-1}$ und $\ddot{s}(t) = ac(c-1)(b \pm t)^{c-2}$. Ein Vergleich mit der DGL ergibt $ac(c-1)(b \pm t)^{c-2} = \frac{-1}{a^2(b \pm t)^{2c}}$. Es folgt $c - 2 = -2c$ bzw. $c = \frac{2}{3}$ und $a\frac{2}{3} \cdot \frac{-1}{3} = -a^{-2}$ d.h. $a^3 = \frac{9}{2}$ bzw. $a = \sqrt[3]{\frac{9}{2}}$.

(T 4) Fluchtgeschwindigkeiten und schwarze Löcher

Die Bewegung eines Körpers der Masse m im Schwerefeld der Erde (mit Masse M_E) wird durch die Bewegungsgleichung $\ddot{s}(t) = -\frac{\gamma \cdot M_E}{\|s(t)\|^3} s(t)$ beschrieben. ($M_E = 5,97 \cdot 10^{24}$kg, $\gamma = 6,674 \cdot 10^{-11}\text{m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$) Die *Fluchtgeschwindigkeit* eines Körpers ist die vertikale Geschwindigkeit, welche ein Körper an der Erdoberfläche haben muß um nicht wieder herunterzufallen.

(a) Lösen sie die zugehörige DGL für den Abstand r zum Erdmittelpunkt und berechnen Sie die Fluchtgeschwindigkeit $\dot{r}_F(0)$. (Erdradius $R_E = 636 \cdot 10^4$m)

(b) Welche Masse müßte die Erde nach dieser klassischen Rechnung haben, damit sie ein schwarzes Loch mit Schwarzschildradius R_E wäre? (d.h. $\dot{r}_F(0) = c = 299792458\text{ms}^{-1}$.)

LÖSUNG:

(a) Wie in T3 b) ergibt sich $r(t) = \sqrt[3]{\frac{9\gamma M}{2}}(b \pm t)^{\frac{2}{3}}$. Die Fluchtgeschwindigkeit $\dot{r}_F(0)$ ergibt sich durch die Ableitung der speziellen Lösung $r_F(t) = \sqrt[3]{\frac{9\gamma M}{2}}(\frac{R_E^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\frac{9\gamma M}{2}}} + t)^{\frac{2}{3}}$. Es ergibt sich $\dot{r}_F(0) = \sqrt[3]{\frac{9\gamma M}{2}}\frac{2}{3}\left(\frac{R_E^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\frac{9\gamma M}{2}}}\right)^{\frac{-1}{3}} = \left(\frac{9\gamma M}{2}\right)^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} R_E^{\frac{-1}{2}} = \sqrt{\frac{2\gamma M}{R_E}} \approx 11,2\frac{\text{km}}{\text{s}}$.

(b) Auflösen nach M_E ergibt die Formel $M = \frac{\dot{r}_F(0)^2 R_E}{2\gamma}$. Die Erde müßte demnach eine Masse von $\approx 4,28 \cdot 10^{33}$kg haben.