1. Tutorium zur Analysis III, Lösungsvorschlag

Aufstellen und lösen einfacher Differentialgleichungen

Aufgaben

A 1 (Hinschwinden des Bierschaums)
Ein Glas Bier wird zur Zeit $t = 0$ frisch gezapft. Rührt man das Bier nicht an, so verringert sich das Volumen $V(t)$ des Bierschaums pro Zeit mit einer Rate, die proportional zum momentan vorhandenen Schaumvolumen ist. Stelle eine Differentialgleichung für V als Funktion der Zeit t auf. Löse die Differentialgleichung.

In einem kurzen Zeitintervall Δt beträgt die Volumenänderung ΔV

$$\Delta V \approx -KV(t)\Delta t$$

mit einer Konstante $K > 0$. Teilt man durch Δt so erhält man

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} \approx -KV(t).$$

Für $\Delta t \to 0$ erhält man die Formel

$$\frac{dV}{dt}(t) = -KV(t).$$

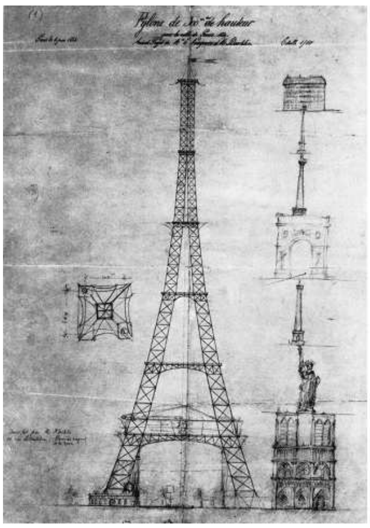
Unter der Annahme $V(t) \neq 0$ können wir diese Gleichung durch $V(t)$ teilen und erhalten

$$\left(\frac{d}{dt}\ln(V)\right)(t) = \frac{1}{V(t)}\frac{dV}{dt}(t) = -K.$$

Integration beider Seiten liefert

$$\ln(V(t)) - \ln(V(0)) = -Kt + K\cdot 0 \quad\Rightarrow\quad e^{\ln V(t)}e^{-\ln V(0)} = e^{-Kt} \quad\Rightarrow\quad V(t) = V(0)e^{-Kt}.$$

A 2 (Säulenkonstruktion)
Eine Säule habe die Gestalt eines Rotationskörpers mit der nach unten gerichteten x-Achse als Rotationsachse. Der Nullpunkt der x-Achse liege am oberen Säulenende, wo der Säulenradius r_0 Meter betrage und auf welchem sich eine Nutzlast von $m_0 kg$ befinde. Die Massendichte des Säulenmaterials betrage $\rho\, kg/m^3$. Wie groß muss der Säulenradius $r(x)$ an der Stelle x gewählt werden, damit jeder (horizontale) Säulenquerschnitt pro Quardratmeter die selbe Belastung trägt.
Hinweis:



Über dem Querschnitt an der Stelle $x > 0$ befindet sich sowohl die Nutzlast m_0 als auch die Masse des darüber befindlichen Stückes der Säule, welches gegeben ist als Dichte mal Volumen dieses Säulenstücks, also

$$m_S(x) = \rho \int_0^x \pi r(t)^2 dt$$

(unter Benutzung der Formel für das Volumen von Rotationskörpern). Wir verlangen, dass die Gesamtmasse über x geteilt durch die dortige Querschnittsfläche $\pi r(x)^2$ konstant ist, also

$$\frac{m_0 + \rho \int_0^x \pi r(t)^2 dt}{\pi r(x)^2} = konst = \frac{m_0}{\pi r_0^2}$$

oder

$$m_0 + \rho \int_0^x \pi r(t)^2 dt = \frac{m_0 r(x)^2}{r_0^2}.$$

Ableiten führt zu

$$\rho \pi r(x)^2 = \frac{m_0}{r_0^2} 2r(x) r'(x) \quad \Rightarrow \quad r'(x) = \frac{\rho \pi r_0^2}{2m_0} r(x).$$

Wir erhalten wie in A1 die Lösung

$$r(x) = r_0 e^{\frac{\rho \pi r_0^2}{2m_0} x}.$$

A 3 (Verfolgung eines U-Boots)

Der Kommandant eines Zerstörers entdeckt in 5 Seemeilen Entfernung ein feindliches U-Boot, das sofort abtaucht. Er fährt zunächst 4 Seemeilen gradlinig auf den Tauchpunkt zu. Dort wechselt er abrupt die Fahrtrichtung und schlägt nun einen raffinierten Kurs ein, der mit Sicherheit direkt über das U-Boot führen wird, egal in welche Richtung es sich fortbewegt. Hierbei wird angenommen, dass sich das U-Boot gradlinig (in unbekannter Richtung) mit konstanter Geschwindigkeit fortbewegt. Die Geschwindigkeit des Zerstörers sei dem Betrage nach konstant und viermal so groß wie die des U-Boots.

Welchen Weg schlägt der Zerstörer 1 Seemeile vom Abtauchpunkt entfernt ein? Gib die Fahrtkurve an. Gibt es mehr als eine Möglichkeit? Ist der geforderte Bewegungsablauf physikalisch realisierbar?

Hinweis: Beschreibe die Position $\gamma(t) \in \mathbb{R}^2$ des Zerstörers zur Zeit t durch Polarkoordinaten $\phi(t)$, $r(t)$, wobei 0-Punkt=Tauchpunkt und x-Achse=Halbgerade vom Tauchpunkt zur anfänglichen Position des Zerstörers. Wie groß muss $r(t)$ sein, damit man zu jedem Zeitpunkt die Chance hat, das U-Boot zu erwischen.

Das U-Boot befindet sich zum Zeitpunkt $t \geq 0$ im Abstand $1 + v_0 t$ vom Ursprung (=Abtauchpunkt), wobei v_0 (in Seemeilen pro Zeiteinheit) seine Geschwindigkeit ist. Für $t = 0$ befindet sich der Zerstörer genau eine Seemeile vom Ursprung im Punkt $(1, 0)$.

Das U-Boot könnte also in diesem Moment unter dem Zerstörer sein, wenn es in Richtung $(1, 0)$ losgefahren wäre. Allgemein hat das Boot nur dann eine Chance, über dem U-Boot zu sein, wenn sein Abstand zum Ursprung $r(t) = 1 + v_0 t$ ist. In Polarkoordinaten hat man für die Fahrtkurve des Boots

$$\gamma(t) = r(t) \cdot (\cos \phi(t), \sin \phi(t))$$

Seine Geschwindigkeit ist also

$$\gamma'(t) = r'(t) \cdot (\cos \phi(t), \sin \phi(t)) + r(t)\phi'(t)(-\sin \phi(t), \cos \phi(t))$$

und hat den Betrag

$$v(t) := \|\gamma'(t)\|_2 = \sqrt{r'(t)^2 + r(t)^2 \phi'(t)^2}.$$

Da nach Voraussetzung $v(t)$ konstant $= 4v_0$ ist und zusätzlich $r(t) = 1 + v_0 t$ ist, folgt

$$16v_0^2 = v(t)^2 = v_0^2 + (1 + v_0 t)^2 \phi'(t)^2$$

und somit

$$\phi'(t) = \pm\frac{\sqrt{15}v_0}{1+v_0 t}.$$

Die rechte Seite ist stets von 0 verschieden. Da ϕ differenzierbar sein soll, muss ϕ' also immer positiv oder immer negativ sein. Wir führen die Rechnung nur für positives Vorzeichen durch (für negatives geht es analog).

Integrieren beider Seiten liefert

$$\phi(t) - \phi(0) = \sqrt{15}\ln(1+v_0 t).$$

Da sich der Zerstörer zur Zeit $t = 0$ auf der positiven x-Achse befindet, gilt $\phi(0) = 0$. Wir erhalten

$$\phi(t) = \sqrt{15}\ln(1+v_0 t) \quad \text{und} \quad r(t) = 1 + v_0 t.$$

Eine zweite Lösung ist durch $(r(t), -\phi(t))$ gegeben.

Der abrupte Richtungswechsel zum Zeitpunkt 0 ist unphysikalisch. Außerdem: Woher soll der Kommandant wissen, dass das U-Boot gerade ein viertel so schnell ist wie er.