Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Roch
Martin Fuchssteiner
Katrin Krohne

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2006/07 17. Oktober 2006

Analysis III

1. Übung

Gruppenübungen

Aufgabe G1 Lipschitzstetigkeit (Wiederholung)

(a) Was bedeutet Lipschitzstetigkeit?

(b) Welche der folgenden Funktionen $f_i : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ sind stetig bzw. lipschitzstetig?

(i) $f_1(x) = |x|$ (ii) $f_2(x) = \sqrt{x}$ (iii) $f_3(x) = x^3$

(c) Geben Sie eine stetige Funktion an, die nicht lipschitzstetig ist.

Aufgabe G2 Lösungsräume linearer homogener Differentialgleichungen

Definition: Eine *lineare homogene Differentialgleichung 1. Ordnung* auf $\mathbb{R}$ ist eine Gleichung der Form $y'(x) + f(x) \cdot y(x) = 0$, wobei y bzw. f eine differenzierbare bzw. stetige reelle Funktion ist.

(a) Überlegen Sie sich, warum eine solche Gleichung linear, homogen bzw. 1. Ordnung heißt.

(b) Wir betrachten Differentialgleichung $y' - y = 0$ auf $\mathbb{R}$.

(i) Ist dies eine lineare homogene Differentialgleichung 1. Ordnung?

(ii) Zeigen Sie, daß für Lösungen f und g auch die Funktionen $-f$, $f + g$ sowie λf $(\lambda \in \mathbb{R})$ wieder Lösungen der Differentialgleichung sind. Welche algebraische Struktur hat also die Menge aller Lösungen?

(iii) Der Lösungsraum einer linearen homogenen Differentialgleichung 1. Ordnung ist höchstens 1-dimensional. Bestimmen Sie den Lösungsraum obiger Differentialgleichung.

Aufgabe G3 Der Satz vom lokalen Inversen (Wiederholung)

(a) Wie lautet der Satz vom lokalen Inversen?

(b) Es sei $\Omega = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$ und $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$, $(r, \varphi) \mapsto r(\cos\varphi, \sin\varphi)$. Zeigen Sie, daß f lokal invertierbar ist und bestimmen Sie $(f^{-1})'$

Aufgabe G4 Bonbon

Wieviel man von einem Bonbon in einem kurzen Zeitintervall ablutscht, ist zur Länge dieses Intervalls und zur Oberfläche des Bonbons proportional. Nehmen Sie an, daß das Bonbon die Form einer Kugel hat und behält. Stellen Sie eine Differentialgleichung für den Kugelradius auf, und lösen Sie diese. (Benutzen Sie die Formeln für das Volumen und die Oberfläche einer Kugel, die Sie aus der Schule kennen.)

Aufgabe G5 Der Satz über implizite Funktionen(Wiederholung)

(a) Wie lautet der Satz über implizite Funktionen?

(b) Bestimmen Sie die Nullstellenmenge N der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2(1 - x^2) - y^2$.

(c) Auf welche Nullstellen (a, b) in N ist der Satz über implizite Funktionen anwendbar, d.h. für welche $(a, b) \in N$ gibt es Umgebungen U von a und V von b und eine stetig differenzierbare Abbildung $g : U \to V$ mit $f(x, g(x)) = 0$ für alle $x \in U$?

Hausübungen

Aufgabe H1 Exponentielles Wachstum

Es sei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, welche überall die Gleichung

$$f'(x) = cf(x)$$

erfüllt. Beweisen Sie $f(x) = f(0) \cdot e^{cx}$.

Hinweis: Verwenden Sie die Hilfsfunktion $F(x) = f(x)e^{-cx}$.

Aufgabe H2 Banachscher Fixpunktsatz

Es sei V ein Banachraum (z.B. $V = \mathbb{R}^n$) und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in V.

(a) Ist $q \in \mathbb{R}$, $q > 0$ eine Konstante, so gilt für die Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen $S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$ und $m > n$ die Ungleichung $|S_m - S_n| \leq q^{n+1} \cdot \frac{1-q^{m-n}}{1-q}$.

(b) Gilt sogar $0 < q < 1$, so ist $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge.

(c) Gibt es eine Konstante $q \in \mathbb{R}$ mit $\|x_{k+2} - x_{k+1}\| \leq q\|x_{k+1} - x_k\|$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so gilt auch $\|x_m - x_n\| \leq |S_{m-1} - S_{n-1}| \cdot \|x_1 - x_0\|$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$.

(d) Gilt sogar $0 < q < 1$ in (c), so konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(e) Beweisen Sie: Ist $f : V \to V$ eine Kontraktion (,d.h. es gibt ein $0 < q < 1$ mit $\|f(x) - f(y)\| \leq q\|x - y\|$ für alle $x, y \in V$), so hat f einen eindeutigen Fixpunkt.

Aufgabe H3 Lösungsräume linearer homogener Differentialgleichungen

Definition: Eine *lineare homogene Differentialgleichung n. Ordnung* auf $\mathbb{R}$ ist eine Gleichung der Form $y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0$, wobei y eine n-mal differenzierbare Funktion und die a_i stetige reelle Funktionen sind.

(a) Überlegen Sie sich, warum eine solche Gleichung linear, homogen bzw. n. Ordnung heißt.

(b) Zeigen Sie, daß die Menge aller Lösungen einer solchen Differentialgleichung einen Vektorraum bilden.