Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Roch
Martin Fuchssteiner
Katrin Krohne

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

23. Januar 2007

12. Übung zur Analysis III

Aufgaben

A 1 (Isolierte Singularitäten)
Bestimme und klassifiziere die Singularitäten folgender Funktionen:

(a) $f(z) := \frac{\cos z}{z}$,

(b) $g(z) := \frac{z^2}{(e^z-1)^2}$,

(c) $h(z) := \sin(\frac{1}{z})\cos(\frac{1}{z})$.

A 2 (Laurentreihen) (4 Punkte)

(a) Betrachte die Funktion

$$f(z) = \frac{z^2+1}{z^3-3z^2+2z},$$

und bestimme deren maximalen Definitionsbereich. Wo ist f holomorph? Entwickle f um 0 in eine Laurentreihe.

(b) Zeichne Kreisringe um $\frac{1}{3}$, auf denen f holomorph ist. Sei

$$g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}\left(z-\frac{1}{3}\right)^{-k}$$

der Hauptteil der Laurentreihe von f auf dem Kreisring, welcher $1+i$ enthält. Welchen Konvergenzradius hat die Potenzreihe von $g\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{3}\right)$?

A 3 (Noch mehr Laurentreihen) (3 Punkte)
Gib den Hauptteil der Laurentreihe der Funktion $f : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) := \frac{e^z \cos z}{z^2}$ um 0 an, und berechne das Integral

$$\int_{|z|=1} f(z)dz.$$

A 4 (Und noch mehr Laurentreihen) (4 Punkte)
Die Funktion f sei holomorph in $z_0 \in \mathbb{C}$. Der Punkt z_0 wird eine k-fache Nullstelle von f genannt, wenn für die Potenzreihenentwicklung von f um z_0 gilt:

$$\sum_{n=k}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \quad \text{mit } c_k \neq 0.$$

Zeige, dass f genau dann eine k-fache Nullstelle in z_0 hat, wenn $\frac{1}{f}$ in z_0 einen Pol k-ter Ordnung hat.

A 5 (Eine Kurve zersägt den Raum) (4 Punkte)
Sei $r : [0,2\pi] \to (0,\infty)$ stetig mit $r(0) = r(2\pi)$ und sei eine Kurve $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ definiert durch $\gamma(t) := r(t)e^{it}$.

Zeige, dass

$$\mathbb{C}\setminus\{\gamma(t) \mid t \in [0,2\pi]\} = A \cup B,$$

wobei A und B disjunkt und jeweils offen und wegzusammenhängend sind. Weiterhin ist A beschränkt und B unbeschränkt.