Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Roch
Martin Fuchssteiner
Katrin Krohne

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2006/07 9. Januar 2007

Analysis III

11. Übung

Gruppenübungen

Aufgabe G1 Holomorphie

Nenne 5 äquivalente Charakterisierungen von Holomorphie auf Sterngebieten.

Aufgabe G2 Konvergenzradius von Taylorreihen

Sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Ferner sei $a \in \Omega$ und $B_R(a)$ die größte offene Kreisscheibe um a, die noch ganz in Ω enthalten ist.

(a) Zeige: Ist f auf $B_R(a)$ unbeschränkt, dann ist R gleich dem Konvergenzradius der Taylorreihe von f um den Entwicklungspunkt a.

(b) Bestimme den Konvergenzradius der Taylorreihen der folgenden komplexen Funktionen um $z = 0$:

$$(i) \quad f(z) = \tfrac{1}{z+i} \qquad (ii) \quad f(z) = \tfrac{1}{1+z+z^2} \qquad (iii) \quad f(z) = \tfrac{1}{\cos z}$$

Aufgabe G3 Minimumsprinzip

Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und f eine holomorphe Funktion auf G, die nicht konstant ist. Beweisen Sie:

(a) Hat die Funktion $|f|$ in $z_0 \in G$ ein lokales Minimum, so gilt $f(z_0) = 0$.

(b) Ist f auf G nullstellenfrei, das Gebiet G beschränkt und $\tilde{f} : \overline{G} \to \mathbb{C}$ eine stetige Fortsetzung von f, so nimmt $|\tilde{f}|$ sein Minimum auf dem Rand ∂G an.

(c) Jedes nichtkonstante Polynom in $\mathbb{C}[z]$ hat eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

Aufgabe G4 Cauchy-Integralsatz

Bestimme folgende Integrale:

$$\text{(a)} \quad \int_{|z|=2} \frac{\sin \frac{\pi}{2} z}{z^2-1} dz \qquad\qquad \text{(b)} \quad \int_{|z|=3\sqrt{\pi}} \frac{e^{iz}}{z^2+1} dz$$

Aufgabe G5 Niveaumengen

Es sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine nicht konstante holomorphe Funktion auf dem Gebiet Ω.

(a) Zeigen Sie, daß für alle $a \in \mathbb{C}$ die Niveaumenge $f^{-1}(a)$ keinen Häufungspunkt in Ω haben kann.

(b) Beweisen Sie, daß alle Niveaumengen nicht konstanter holomorpher Funktionen auf Ω sogar abgeschlossen und diskret in $\mathbb{C}$ sind.

Hausübungen

Aufgabe 1 Die Exponentialfunktion (3 Punkte)

Beweisen Sie $\exp(w + z) = \exp w \exp z$ für alle $w, z \in \mathbb{C}$ mit Hilfe der Holomorphie der Exponentialfunktion ohne Benutzung der Potenzreihe.

Hinweis: Sie können für festes w die Funktion $z \mapsto \exp(w + z)$ betrachten.

Aufgabe 2 Involutionen auf $\mathcal{O}(G)$ (6 Punkte)

Es sei G ein unter der komplexen Konjugation invariantes Gebiet (d.h. $\overline{G} = G$) und $\mathcal{O}(G)$ die Algebra der holomorphen Funktionen auf G.

(a) Zeigen Sie, daß für eine Funktion $f \in \mathcal{O}(G)$ auch die Funktion

$$f^* : G \to \mathbb{C}, \quad f^*(z) = \overline{f(\overline{z})}$$

holomorph ist.

(b) Es sei $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Beweisen Sie, daß die Gleichung $f^* = f$ erfüllt ist, falls f auf $G \cap \mathbb{R}$ reell ist. Gilt auch die Umkehrung?

(c) Zeigen Sie, daß die Abbildung $* : \mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(G)$ eine antilineare Involution ist (d.h. daß $(\lambda f + g)^* = \overline{\lambda} f^* + g^*$ für alle $f, g \in \mathcal{O}(G)$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt).

Aufgabe 3 Satz von Liouville (4 Punkte)

Beweisen Sie, daß das Bild einer ganzen Funktion f, welche nicht konstant ist, dicht in $\mathbb{C}$ liegt. (Zur Erinnerung: Eine auf $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion heißt *ganz*.)