Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Roch
Martin Fuchssteiner
Katrin Krohne

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

9. Januar 2007

10. Übung zur Analysis III

Aufgaben

A 1 **(Identitätssatz)** (2 Punkte)
Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$. Zeige, dass $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt.

A 2 **(Reell-analytische Funktionen)** (4 Punkte)
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{C}$ eine unendlich oft differenzierbare Funktion. f heißt reell-analytisch, wenn zu jedem $x_0 \in I$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass die Taylorreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

auf $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap I$ gegen f konvergiert. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(i) f ist reell analytisch.

(ii) Es gibt ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ mit $I \subset G$ und ein holomorphes $F : G \to \mathbb{C}$ mit $F|_I = f$.

A 3 **(Potenzreihen)** (3 Punkte)
Beweise, dass man die Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus (2\pi\mathbb{Z}) \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{z^2}{1 - \cos z}$$

stetig nach 0 fortsetzen kann und dass man diese fortgesetzte Funktion in einer Umgebung der 0 in eine Potenzreihe entwickeln kann. Wie groß ist der Konvergenzradius dieser Reihe?

A 4 **(Eine Reihe)** (3 Punkte)
Sei $B_1(0)$ die offene Kreisscheibe mit Radius 1 um 0 und $f : B_1(0) \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(0) = 0$. Zeige: Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(z^n)$$

konvergiert auf jeder kompakten Teilmenge von $B_1(0)$ gleichmäßig.
Hinweis: Verwende die Definition der komplexen Differenzierbarkeit mit Differenzenquotienten.

A 5 **(Identitätssatz)** (3 Punkte)
Sei $f : B_1(0) \to \mathbb{C}$ holomorph und für jedes $z \in B_1(0)$ gebe es ein $n_z \in \mathbb{N}_0$ mit $f^{(n_z)}(z) = 0$. Zeige, dass f ein Polynom ist.
Hinweis: Die Menge $A_n := \{z \in B_{\frac{1}{2}}(0) \mid f^{(n)}(z) = 0\}$ enthält für ein n unendlich viele Elemente.