Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Roch
Martin Fuchssteiner
Katrin Krohne

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2006 21. Dezember 2006

Analysis III

9. Übung

Gruppenübungen

(G 1) Kurvenintegrale/Cauchysche Integralformel

(a) Berechnen Sie folgende komplexe Kurvenintegrale

(i) $\int_{|z|=1} \overline{z} dz$ (ii) $\int_{|z-i|=2} \frac{1}{z^2+4} dz$ (iii) $\int_{|z-i|=2} \frac{1}{(z^2+4)^2} dz$ (iv) $\int_{|z|=2} \frac{1}{z^2-2z-3} dz$

(b) Es sei γ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg, welcher von 1 nach πi führt. Berechnen Sie $\int_\gamma ze^z dz$.

(G 2) Cauchysche Integralformel

Es seien $G := \mathbb{C} \setminus [0, 1]$ und $f : G \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$. Zeigen Sie, daß $\int_\gamma f(z)dz = 0$ für alle geschlossene Wege γ in G gilt.

(G 3) Rechnen mit holomorphen Funktionen

(a) Bestimmen Sie alle holomorphen Funktionen $f : B_1(1) \to \mathbb{C}$ mit $f(B_1(1)) \subset \mathbb{R}$.

(b) Bestimmen Sie alle ganzen Funktionen f, für die $f + f'' = 0$ gilt.

Hinweis: Sie können das Fundamentalsystem durch die Exponentialfunktion oder die komplexen Funktionen sin und cos angeben.

(c) Bestimmen Sie alle ganzen Funktionen f, welche die Gleichung $f = f'$ erfüllen.

(d) Bestimmen Sie alle ganzen Funktionen f, für die $(f^2)' = -2f$ gilt.

(G 4) Exponentialfunktion

Wir betrachten die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$.

(a) Geben Sie das Bild der Exponentialfunktion an. Bestimmen Sie die Bilder der Geraden $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{const}$ und $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{const}$ und fertigen Sie eine Skizze an.

(b) Finde alle maximalen Teilmengen von $\mathbb{C}$ auf denen die Exponentialfunktion holomorph bzw. injektiv ist und gib deren Bild an.

(G 5) Die Cayleyabbildungen

Wir betrachten die offene obere Halbebene $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

(a) Beweisen Sie, daß die Cayleyabbildung $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ die Halbebene $\mathbb{H}$ in die offene Einheitskreisscheibe $\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z|) < 1\}$ abbildet.

(b) Beweisen Sie, daß die Cayleyabbildung $z \mapsto i\frac{1+z}{1-z}$ die offene Einheitskreisscheibe $\mathbb{E}$ in die obere Halbebene $\mathbb{H}$ abbildet.

(c) Zeigen Sie, daß die obigen Abbildungen invers zueinander sind.

Hausübungen

(H 1)

Entwickeln Sie folgende Funktionen in eine Potenzreihe um 0

(a) $z \mapsto \exp(z + \pi i)$ (b) $z \mapsto \sin^2 z$, $(\sin z = \frac{1}{2i}(\exp(z) - \exp(-z))$ (c) $z \mapsto \cos(z^2 - \pi)$

(H 2) Der komplexe Logarithmus

Wir betrachten nun lokale Umkehrfunktionen zur Exponentialfunktion:
Definition: Eine holomorphe Funktion $l : G \to \mathbb{C}$ auf einem Gebiet G heißt *Logarithmusfunktion* in G, falls $\exp(l(z)) = z$ für alle $z \in G$ gilt.

(a) Finde ein möglichst großes Gebiet G auf dem ein Logarithmus definiert ist. (Begründe Deine Behauptung.)

(b) Welche möglichen Real- bzw. Imaginärteile kann ein Logarithmus l am Punkt $z = re^{i\varphi}$ $(r, \varphi \in \mathbb{R})$ annehmen?

(c) Was folgt daraus für die Differenz $l_1 - l_2$ zweier Logarithmen l_1 und l_2?

(d) Zeige, daß die folgenden Aussagen für eine holomorphe Funktion $l : G \to \mathbb{C}$ auf einem Gebiet G äquivalent sind:

1. Die Funktion f ist ein Logarithmus in G.
2. Es gilt $l'(z) = \frac{1}{z}$ in G und existiert mindestens ein Punkt $a \in G$ mit $\exp(l(a)) = a$.