Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Roch
Martin Fuchssteiner
Katrin Krohne

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

11. Dezember 2006

8. Übung zur Analysis III
Aufgaben

A 1 (Gleichungen im Komplexen)

1. Finde alle komplexen Zahlen, für die gilt
$$(a)\ e^z = 12, \quad (b)\ z^k = 12, \quad (c)\ (1+i)z^2 - z = -3 - i.$$
2. Finde möglichst große Teilbereiche von $\mathbb{C}$, auf denen man die Funktionen $f(z) = e^z$ und $g(z) = z^k$ umkehren kann. Skizziere diese Mengen.

A 2 (Sinus und Kosinus)
Wie im reellen definieren wir für $z \in \mathbb{C}$
$$\sin z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \quad \text{und} \quad \cos z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}.$$
Zeige, dass sin und cos holomorph sind und dass $\sin' = \cos$ und $\cos' = -\sin$ gilt.

A 3 (Holomorphie) (5 Punkte)
Bestimme alle Punkte in $\mathbb{C}$, in denen die folgenden Funktionen von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar sind:
$$\begin{aligned} f_1 : x+iy &\longmapsto xy + ixy \\ f_2 : x+iy &\longmapsto x^4y^3 + ix^3y^4 \\ f_3 : x+iy &\longmapsto y^2 \sin x + iy \\ f_4 : x+iy &\longmapsto x^2 - y^2 + 2ix|y| \\ f_5 : x+iy &\longmapsto \sin^2(x+y) + i\cos^2(x+y) \end{aligned}$$
Wo sind diese Funktionen holomorph?

A 4 (Imaginärteile holomorpher Funktionen) (4 Punkte)
Welche der folgenden Funktionen sind Imaginärteile einer auf $\mathbb{C}$ holomorphen Funktion?
$$\begin{aligned} v_1 : x+iy &\longmapsto 3x^2 + 4xy + y \\ v_2 : x+iy &\longmapsto -e^y \sin x + \sinh x \cdot \sin y + 2xy \end{aligned}$$

A 5 (Bilder von Geraden und Kreisen) (2 Punkte)
Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z^2$. Zeigen Sie, dass das Bild eines Kreises
$$K_r := \{z = x+iy \in \mathbb{C} : x^2 + y^2 = r^2\} \quad (\text{mit Radius } r \geq 0)$$
wieder ein Kreis ist. Wieviele Urbilder hat ein Bildpunkt?
Untersuchen Sie auch die Bilder von Halbgeraden $\{tz : 0 \leq t < \infty\},\ z \in \mathbb{C}$, durch den Ursprung.
Was passiert mit Kreisen und Halbgeraden, wenn man die Funktion $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z\overline{z}$ anwendet?

A 6 (Konstante Funktionen) (5 Punkte)
Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph.

1. Zeige, dass f konstant ist, wenn wenigstens eine der beiden Funktionen $u = Re\, f$ und $v = Im\, f$ konstant ist.
2. Zeige, dass f konstant ist, wenn $|f|$ konstant ist.
Hinweis: Betrachte die partiellen Ableitungen von $|f|^2$.
3. Zeige: Ist f und $\overline{f}$ holomorph, so ist f konstant.