Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Roch
Martin Fuchssteiner
Katrin Krohne

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2006/07 29. November 2006

Analysis III

7. Übung

Aufgabe 1 Zum Aufwärmen/Klausuraufgabe (maximal 10 Minuten)

Finden Sie die Lösungen für folgende Anfangswertprobleme und geben Sie den maximalen Definitionsbereich Ihrer Lösung an.

(a) $y' = xe^x$, $y(0) = 1$ (b) $y' = (\cos x)y$, $y(\pi) = 1$ (c) $y' = (\cos x)y + x^2 e^{\sin x}$, $y(0) = 5$

Aufgabe 2 Zum Aufwärmen II/Klausuraufgabe (maximal 10 Minuten)

Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem zu folgenden DGLn:

(a) $y'' + 4y' + 4y = 0$ (b) $y'' - 4y' + 4y = 0$ (c) $y^{(4)} + 2y^{(3)} + 2y'' + 2y' + y = 0$

Aufgabe 3 Homogene Differentialgleichungssysteme 1. Ordnung/Klausuraufgabe

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGLnsysteme

(a) $\begin{array}{rcl} u' &=& u + v \\ v' &=& u - v \end{array}$ (b) $\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mathbf{y}$ (c) $\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{y}$

und geben Sie den maximalen Definitionsbereich Ihrer Lösung an.

Hinweis: Setzen Sie in (b) die Zeilen ineinander ein, um DGLn 2. Ordnung für y_1 bzw. y_2 zu erhalten.

Aufgabe 4 Substitution/Klausuraufgabe

Lösen Sie folgende DGLn und geben Sie den maximalen Definitionsbereich der Lösungen an:

(a) $y' = (x + y)^2$ (b) $y' = \frac{y}{x} - \frac{x^2}{y^2}$ (c) $y' = \frac{y \ln y}{1+x^2}$ (d) $y' = \frac{e^{-y^2}}{y(2x+x^2)}$

Aufgabe 5 Variation der Konstanten/Klausuraufgabe

Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem zu folgenden DGLn:

(a) $y' + y = x^2$ (b) $y' + \frac{y}{1+x} = 2x$ (c) $y' + y \sin x = \sin^3 x$

Aufgabe 6 Wronski-Determinante/Klausuraufgabe

In welchen Fällen können die folgenden Funktionen ein Fundamentalsystem einer linearen DGL n-ter Ordnung sein?

(a) $y_1 = 1$, $y_2 = x$, $y_3 = x^2$ (b) $y_1 = x$, $y_2 = x^2$, $y_3 = x^5$ (c) $y_1 = \sin^2 x$, $y_2 = 2\cos^2 x$, $y_3 = 3$

Aufgabe 7 Potenzreihenansatz/Klausuraufgabe (8 Punkte)

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$(y')^2 + y^2 = 1, \quad y(0) = 0.$$

(a) Führen Sie für diese DGL einen Potenzreihenansatz $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ durch.

(b) Bestimmen Sie eine Rekursionsformel für die a_n.

(c) Berechnen Sie $a_0, \ldots, a_6$ (Nehmen Sie dabei an, dass $a_1 > 0$ gilt).

(d) Finden Sie eine geschlossene Form von f.

Aufgabe 8 Der arme Hund (8 Punkte)

Durch das Land Sisylana (die x-y-Ebene) fließt ein Fluß, dessen Ufer durch $x = 0$ und $x = 1$ gegeben sind. Er fließt mit konstanter Geschwindigkeit v_0 in positive y-Richtung. Ein Hund springt im Punkt $(1, 0)$ in den Fluß und versucht, sein Herrchen zu erreichen, das in $(0, 0)$ auf ihn wartet. Der Hund schwimmt mit konstanter Geschwindigkeit v_1 und richtet sich immer genau auf sein Herrchen, während er abgetrieben wird. Bestimme die Kurve $y = \varphi(x)$, die der Hund zurücklegt. Wird er das andere Ufer erreichen? (Wenn ja, an welcher Stelle? Erreicht der Hund das andere Ufer dann in endlicher Zeit?)

Hinweis: $\int \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} dx = \text{arsinh} z$

Aufgabe 9

Verstehen Sie die Übungen 1-7.