Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Roch
Martin Fuchssteiner
Katrin Krohne

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

27. November 2006

6. Übung zur Analysis III

Aufgaben

A 1 **(Eulersche Differentialgleichung)**
Wir betrachten die Eulersche Differentialgleichung

$$a_n x^n y^{(n)} + ... + a_1 x^1 y' + a_0 y = 0 \tag{1}$$

mit $a_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, ..., n$.
Beweise: Die Funktion $y : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ löst genau dann die Eulersche Gleichung (1), wenn $u(t) := y(e^t)$ die Gleichung

$$\sum_{k=0}^{n} a_k k! \binom{D}{k} u = 0$$

löst, wobei $\binom{D}{k} := \frac{1}{k!}(D - k + 1) \cdot ... \cdot (D - 1) \cdot D$ und $D = \frac{d}{dt}$.

A 2
1. **(Eulersche Differentialgleichung)** (3 Punkte)
   Sei $f = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit Stammfunktion F. Bestimme alle Lösungen der Differentialgleichung $ty' + y = f(t)$, $t > 0$.
2. **(Bernoullische Differentialgleichung)** (3 Punke)
   Bestimme für $\alpha, a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$, $\alpha > 1$ sämtliche positiven Lösungen der Differentialgleichung

   $$y' = ay + by^{\alpha}.$$

   Hinweis: Verwende die Substitution $z = y^{1-\alpha}$.

A 3 **(Ansatz nach dem Typ der rechten Seite)** (5 Punkte)
Gegeben sei die Differentialgleichung $y^{(4)} - 4y'' = 1 + \cosh(2x)$.

a) Bestimme ein reelles Fundamentalsystem zur homogenen Gleichung.
b) Wie lautet ein korrekter Ansatz vom Typ der rechten Seite für die inhomogene Differentialgleichung?
c) Bestimme alle Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung.

A 4 **(^{P} Lineare Differentialgleichungen)** (6 Punkte)
Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine Matrix. Beweise die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

(1) Alle Eigenwerte von A haben negativen Realteil.
(2) Es gibt ein $t_0 \geq 0$ mit $\|e^{t_0 A}\| < 1$.
(3) Es gibt $M \geq 1$, $\omega > 0$ mit $\|e^{tA}\| \leq M e^{-\omega t}$ für $t \geq 0$.
(4) Alle Lösungen $x(t)$ von $x' = Ax$ streben für $t \to \infty$ gegen 0.

Hinweis: Ist B eine Diagonalmatrix, so gilt $\|B\| = \max\{|\lambda| \mid \lambda \text{ EW. von } B\}$. (Warum?)

A 5 **(^{K} Maximale Lösung)**
Als *maximale Lösung* einer Differentialgleichung $x' = f(t, x)$ verstehen wir eine Lösung $u : I \to \mathbb{R}^n$, so dass keine Lösung $v : J \to \mathbb{R}^n$ auf einem echt größeren Intervall $J \supsetneq I$ existiert, mit $v|_I = u$.

Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung, die lokal einer Lipschitzbedingung genügt und die beschränkte Mengen auf beschränkte Mengen abbildet. Zeige:
Für eine maximale Lösung

$$u : (t_-, t_+) \to \mathbb{R}^n, \quad \text{von} \quad x' = f(t, x)$$

gilt entweder $t_+ = \infty$ oder $\lim_{t \to t_+} \|u(t)\| = +\infty$.

Orientierungskolloquium

Die Forschungsgebiete des Fachbereichs Mathematik stellen sich vor.

Montag, 27.11.2006 – 16:15-17:15 Uhr – S103/123

Prof. Dr. Martin Otto

FG Logik

„Welche Logik wofür? Logik zwischen Grundlagen und Anwendungen.“

Nach dem Vortrag gibt es ein gemütliches Treffen in S215/219, um über den Vortrag zu reden und die Vortragenden näher kennenzulernen.