Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Roch
Martin Fuchssteiner
Katrin Krohne

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

13. November 2006

4. Übung zur Analysis III

Aufgaben

A 1 (Lösungsräume von Differentialgleichungen)
Entscheide, ob die Lösungsräume der folgenden Differentialgleichungen Vektorräume sind. Wenn ja, dann bestimme die zugehörige Dimension.

$$(a)\ x^2u^{(12)} - \sin(x)u' = u, \quad (b)\ (\cos x + u'')^2 = 0, \quad (c)\ \cos x + e^x u' = 0.$$

A 2 (Lineare Unabhängigkeit von Funktionen) (3+2 Punkte)

1. Entscheide, ob die Funktionen f, g, h linear unabhängig sind.
   (a) $f(x) = \sin^2 x - \sin x$, $g(x) = -1 + \sin x$, $h(x) = \cos^2 x$.
   (b) $f(x) = x^3$, $g(x) = \sin^3 x$, $h(x) = e^x$
2. Berechne die Wronski Determinante an der Stelle $x = 0$ der Funktionen f, g, h aus (b). Vergleiche das Ergebnis mit deinem Ergebnis in 1.(b). Ist das ein Widerspruch zu Satz 3.8?

A 3 (Fundamentalsysteme) (3+1 Punkte)

1. ^{P} *Beweise:*
   Ein Fundamentalsystem bestimmt eine lineare homogene Differntialgleichung n-ter Ordnung eindeutig.
   Genauer:
   Es gibt höchstens eine Möglichkeit, n stetige Funktionen $a_0, ..., a_{n-1}$ zu wählen, so dass $\{\phi_1, ..., \phi_n\}$ ein Fundamentalsystem der Gleichung
   $$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = 0$$
   ist.
2. Kann $\{y_1 = 1, y_2 = x, y_3 = x^2\}$ ein Fundamentalsystem zu einer Differentialgleichung 3. Ordnung sein? Wenn ja, zu welcher?

A 4 (Eliminationsmethode) (1+3 Punkte)
Wir betrachten das folgende System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\begin{array}{rl} u' = & au + bv \\ v' = & cu + dv \end{array}, \quad u(t_0) = u_0, \quad v(t_0) = v_0$$

mit konstanten Koeffizienten $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Ziel ist es, das System von Differentialgleichungen so umzuformen, dass man zuerst eine Differentialgleichung in u lösen kann, um dann die Lösungen in die untere Gleichung einzusetzen. Aus dieser erhält man dann eine Lösung v.

1. Zeige, dass jede Lösung u des Systems eine geeignete lineare Differentialgleichung zweiten Grades erfüllt.
2. Löse das System
   $$u' = u + v, \quad v' = u - v, \quad u(0) = 1, \quad v(0) = \sqrt{2} - 1.$$

A 5 (Die Matrixexponentialfunktion) (4 Punkte)
Berechne e^A, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$