Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Roch
Martin Fuchssteiner
Katrin Krohne

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2006/07 30. Oktober 2006

Analysis III

3. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

Aufgabe G1 Zum Aufwärmen

Eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei im 2. Argument sogar lokal lipschitzstetig.

(a) Gibt es durch einen beliebigen Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ immer ein Lösung der DGL $y' = f(x, y)$? Wenn ja, ist diese Lösung eindeutig?

(b) Es gelte nun zusätzlich $f(-x, y) = -f(x, y)$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, daß dann jede Lösung y obiger DGL eine gerade Funktion ist.

Aufgabe G2 Trennung der Variablen

Bestimmen Sie alle Lösungen der DGL $y'(x) = y(x)^n$.

Aufgabe G3

Wir betrachten die homogene DGL $y'' + b \cdot y' + c \cdot y = 0$ mit den konstanten Koeffizienten b und c.

(a) Erraten Sie für $b = 0$ und $c = 1$ zwei unabhängige Lösungen.

(b) Lösen Sie für $b = 3$ und $c = 2$ obige DGL mit dem Ansatz $y(x) = \exp(\lambda x)$.

(c) Wie können Sie die in a) erratenen Lösungen mit dem Lösungsverfahren aus b) erhalten?

Aufgabe G4 Reduktion der Ordnung

Es soll die DGL $x^2 y'' - xy' + y = 0$ auf dem offenen Intervall $(0, \infty)$ gelöst werden.

(a) Raten Sie eine Lösung y_1 der DGL.

(b) Bestimmen Sie durch Reduktion der Ordnung eine zweite, von y_1 linear unabhängige Lösung der DGL.

Aufgabe G5

Finden Sie alle Lösungen der DGL $y^{(4)} - 5y^{(2)} + 4y = 0$.

Hinweis: Sie können wie in G3 b) vorgehen.

Hausübungen

Aufgabe H1 Trennung der Variablen

(a) Bestimmen Sie die Lösung der DGL $y' = (y+c)^n$ ($c = \text{const}$) für beliebige Anfangswerte x_0 und y_0.

Hinweis: Sie können die Substitution $z(x) = y(x) + c$ verwenden.

(b) Bestimmen Sie die Lösung der DGL $y' + y + e^x \cdot y^3 = 0$ für beliebige Anfangswerte x_0 und y_0.

Hinweis: Sie können die Substitution $z(x) = y(x)^{-2}$ verwenden.

Aufgabe H2 Trennung der Variablen

Finden Sie die Lösungen für folgende Anfangswertprobleme:

(a) $y' + \frac{(1+x)}{x} y = 0$, $y(1) = 1$ (b) $y' = y^2 + 1$, $y(\frac{\pi}{4}) = -1$ (c) $y' + y - x^2 = 0$, $y(0) = 10$

Aufgabe H3

Es sei $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Wir betrachten die DGL $\ddot{\gamma}(t) = -\nabla V(\gamma(t))$.

(a) Zu einer differenzierbaren Kurve $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ definieren wir die *Energie*:

$$E_\gamma(t) := \frac{1}{2}\|\dot{\gamma}(t)\|^2 + V(\gamma(t)).$$

Zeigen Sie, daß E_γ für jede Lösung γ obiger DGL konstant ist.

(b) Finden Sie alle Lösungen γ obiger DGL im Falle $n = 2$, $V(x, y) = 2x^2 + 3y^2$.

(c) Versuchen Sie dies in Beziehung zu der Bewegung einer Masse im Gravitationsfeld ∇V zu setzen. Welche physikalische Bedeutung haben hier die zwei Summanden $\frac{1}{2}\|\dot{\gamma}(t)\|^2$ und V?