Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Roch
Martin Fuchssteiner
Katrin Krohne

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

30. Oktober 2006

2. Übung zur Analysis III

Aufgaben

A 1 (Eine Lipschitzbedingung)
Entscheide, welche der folgenden Funktionen in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ einer Lipschitzbedingung oder einer lokalen Lipschitzbedingung genügen.

1. $f(x,y) := x|y|$
2. $f(x,y) := \sin(|y|^{-1})$ für $y \neq 0$, $f(x,0) = 0$ für alle x
3. $f(x,y) := \arctan(x+y)$, $n = 1$

A 2 (Existenzintervalle)

1. Zeige für das Anfangswertproblem
$$y' = \sin(x^2y^2)\ , \qquad y(1) = 0\ ,$$
im Rechteck $R = \{(x,y) \ : \ |x-1| \leq 1, |y| \leq 1\}$ betrachtet, dass dieses Problem genau eine Lösung auf dem Intervall $[0,2]$ besitzt.
2. ^{P} (3 Punkte) Gib ein Intervall I an, so dass das Anfangswertproblem
$$y' = y^2 + 2t, \quad y(0) = 2$$
eine eindeutige Lösung $y : I \to \mathbb{R}$ hat.
Wer findet das größte solche Intervall?

A 3 (Picard-Iteration) (5 Punkte)
In $\mathbb{R}^2$ sei die Differentialgleichung $y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} y$ zu beliebiger Anfangsbedingung $y(0) = v$ gegeben. Berechne vier Schritte des Iterationsverfahrens nach Picard. Versuche mit Hilfe dieser Iterationsschritte die Lösung zu erraten. Beweise, dass sie es ist.

A 4 (^{P} Periodische Lösungen) (3 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die einer lokalen Lipschitzbedingung genügt. Ferner sei f in der ersten Komponente L-periodisch, das heißt
$$f(x+L,y) = f(x,y) \ \text{ für alle } \ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$
Sei $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine globale Lösung der Differentialgleichung $y' = f(x,y)$. Weiterhin gebe es ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $u(x_0 + L) = u(x_0)$. Zeige, dass u L-periodisch ist.

A 5 **(Die zugehörige Integralgleichung)** (4 Punkte)
Es sei seien (x_0, y_0), R, G, M, L, ε und I wie in Satz 1.6. gegeben. Insbesondere sei $f : G \to \mathbb{R}^n$ stetig mit

$$\|f(x,y)\|_2 \leq M \quad \text{und} \quad \|f(x,y) - f(x,y')\|_2 \leq L\|y - y'\|_2$$

für alle $(x,y), (x,y') \in G$.

1. Außerdem sei $u : I \to \mathbb{R}^n$ Riemann integrierbar und löse die Integralgleichung

$$u(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, u(t))dt.$$

   Zeige, dass u stetig differenzierbar ist.

2. Sei nun $u_0 = y_0$ und

$$u_{k+1} := y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, u_k(t))dt.$$

   Zeige, dass (u_k) in $C^1(I)$, das heißt in der Norm $\|u\|_\infty + \|u'\|_\infty$ gegen die Lösung des Anfangswertproblems

$$u' = f(x,u), \quad u(x_0) = y_0$$

   konvergiert.