35

4.) Orthogonale Projektion P von $\mathbb{R}^3$ auf $x-y$ Ebene:

$$P\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix},\quad P\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad P\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad P\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \text{ also}$$

$$M_P^{\mathcal{E}_3,\mathcal{E}_3}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} \qquad \text{Frage: } \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix} \text{ gehört zu ?}$$

5.) Die $m\times 1$ Matrix

$M=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix}$ ist Matrix lin. Abbildung $T: \mathbb{K}\to\mathbb{K}^m$ bzgl. kanonischer Basen

nämlich, $T(\lambda)=\lambda\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix}$

6.) Die $1\times n$ Matrix

$M:=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \dots & \alpha_n\end{pmatrix}$ ist Matrix lin. Abbildung $T: \mathbb{K}^n\to\mathbb{K}$ bzgl. kan. Basen

nämlich $T(e_i)=\alpha_i\in\mathbb{K}$, also

$$T\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^n x_i\alpha_i=\langle\vec{x},\vec{\alpha}\rangle$$

3.9 Berechnung des Bildes eines allgemeinen Vektors

$T: V\to W$, $\mathcal{L}=\{b_1\dots b_n\}$ bzw. $\mathcal{L}'=\{c_1\dots c_m\}$ Basen von V und W

$M:=M_T^{\mathcal{L},\mathcal{L}'}=(\alpha_{ij})_{i,j}$ Sei $v=\sum_{j=1}^n\lambda_j b_j\in V$, dann

$$T(v)=T\left(\sum_{j=1}^n\lambda_j b_j\right)=\sum_{j=1}^n\lambda_j T(b_j)=\sum_{j=1}^n\lambda_j\sum_{i=1}^m\alpha_{ij}c_i=\sum_{i=1}^m\left(\sum_{j=1}^n\alpha_{ij}\lambda_j\right)c_i$$

Also

$$T:\ V\longrightarrow W$$

$$\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}_{\mathcal{L}}\longmapsto\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^n\alpha_{1j}\lambda_j\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^n\alpha_{mj}\lambda_j\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\dots&\alpha_{1n}\\ \alpha_{21}&\alpha_{22}&&\alpha_{2n}\\ \vdots&&&\\ \alpha_{m1}&\alpha_{m2}&&\alpha_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}$$

d.h. wir rechnen

1 Koordinate des Bildvektors = 1 Zeile mal Vektor

2 Koordinate des Bildvektors = 2 Zeile mal Vektor

$\vdots$

m Koordinate des Bildvektors = m. Zeile mal Vektor

3.10 Beispiele

1) $M_T^{\mathcal{L}\mathcal{L}'}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$ $v=\begin{pmatrix}7\\3\\9\end{pmatrix}_{\mathcal{L}}$ dann hat $T(v)$ in Basis $\mathcal{L}'$ die Koordinaten

$$T(v)=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\3\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot7+2\cdot3+3\cdot9\\4\cdot7+5\cdot3+6\cdot9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}50\\122\end{pmatrix}$$

2) Unter der Drehung D auf $\mathbb{R}^2$ bzgl. kan. Basisvektoren ist

$$D\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\varphi\cdot\xi - \sin\varphi\cdot\eta\\ \sin\varphi\cdot\xi + \cos\varphi\cdot\eta\end{pmatrix}$$

3.) Das LGS

$$\begin{aligned} \alpha_{11}x_1 + \ \cdots \ + \alpha_{1n}x_n &= y_1\\ \alpha_{21}x_1 + \ \cdots \ + \alpha_{2n}x_n &= y_2\\ &\ \vdots\\ \alpha_{m1}x_1 + \ \cdots \ + \alpha_{mn}x_n &= y_m \end{aligned}$$

kann geschrieben werden als

$$\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{2n}\\ \vdots & & \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix} \qquad (*)$$

Also ist $A = (\alpha_{ij})_{i,j}$ die Matrix von $T: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ bzgl. kan. Basen, $x \in \mathbb{K}^n$, $y \in \mathbb{K}^m$

Dann heißt $(*)$: Für die eine Abbildung T, $y \in \mathbb{K}^m$ suche $x \in \mathbb{K}^n$ mit $Tx = y$, also ein Urbild von y unter T.

Dadurch wird die Theorie LGS-e sehr einfach.

(Frage: Zusammenhang zwischen $\ker T$ und die Lösungen der homogenen LGS?)

3.11 Vielfaches und Summen von Matrizen

Gegeben V mit Basis $\mathcal{L}$, W mit Basis $\mathcal{L}'$, $S, T: V \to W$ linear

$M_S^{\mathcal{L},\mathcal{L}'} = (\alpha_{ij})_{i,j}$ $\qquad M_T^{\mathcal{L}\mathcal{L}'} = (\beta_{ij})_{i,j}$

<u>Satz</u> 1) Für $\lambda \in \mathbb{K}$ ist die Matrix von λS gegeben durch

$$M_{\lambda S}^{\mathcal{L}\mathcal{L}'} = (\lambda\alpha_{ij})_{i,j} = \begin{pmatrix}\lambda\alpha_{11} & \cdots & \lambda\alpha_{1n}\\ & & \\ \lambda\alpha_{m1} & \cdots & \lambda\alpha_{mn}\end{pmatrix}$$

2) Die Matrix von $S+T$ ist gegeben durch

$$M_{S+T}^{\mathcal{L}\mathcal{L}'} = (\alpha_{ij} + \beta_{ij})_{i,j} = \begin{pmatrix}\alpha_{11}+\beta_{11} & \cdots & \alpha_{1n}+\beta_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ \alpha_{m1}+\beta_{m1} & \cdots & \alpha_{mn}+\beta_{mn}\end{pmatrix}$$

<u>Beweis</u>: durch Hinschauen: an der Stelle i,j steht die i-te Koordinate des Bildes des j-ten Basisvektors

3.12 $M_{m,n}$ als Vektorraum

(I) Mit skalarer Multiplikation und Addition ist $M_{m,n}$ ein VR.

(ii) Die <u>Elementarmatrizen</u> $E_{ij} = \begin{array}{cc} & \downarrow j \\ i \to & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ & 1 & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$ mit genau einer 1 in i-ter Zeile, j-ter Spalte, sonst 0

Bilden offenbar eine Basis von $M_{m,n}$ ("kanonische Basis")

Also ist $\dim M_{m,n} = m \cdot n$

(iii) Für V mit Basis $\mathcal{L}$, W mit Basis $\mathcal{L}'$ ist

$\mathcal{L}(V,W) \ni T \mapsto M_T^{\mathcal{L}\mathcal{L}'} \in M_{m,n}$ ein VR-Isomorphismus

Insbesondere: $\dim \mathcal{L}(V,W) = m \cdot n$.

(iv) <u>Spezialfall</u>: $W = \mathbb{K}$ (Ergänzung)

$\mathcal{L}(V,\mathbb{K}) = V^*$ ist n-dimensionaler VR, der <u>Dualraum</u> der <u>Linearformen</u> auf V (vgl. 1.17)

Ist $\mathcal{L} = \{b_1 \ldots b_n\}$ Basis von V, so ist die <u>duale Basis</u>

$\mathcal{L}^* := \{b_1^*, \ldots, b_n^*\}$ von V^* mit den Matrizen

$(1,0 \ldots 0) \ \ldots \ (0,0 \ldots 0,1)$ gegeben, also

$b_i^*(b_j) = \delta_{ij}$ $\qquad b_i^*\begin{pmatrix}\lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n\end{pmatrix} = \lambda_i$

3.13 Matrixmultiplikation

Seien U, V, W Vektorräume mit Basen $\mathcal{L}_1 = \{a_1 \ldots a_n\}$, $\mathcal{L}_2 = \{b_1 \ldots b_m\}$

$\mathcal{L}_3 = \{c_1 \ldots c_\ell\}$ $\qquad T: U \to V$, $S: V \to W$ linear mit Matrizen

$B := M_T^{\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2} = (\beta_{jk})_{\substack{1 \le j \le m \\ 1 \le k \le n}}$ $\qquad A := M_S^{\mathcal{L}_2\mathcal{L}_3} = (\alpha_{ij})_{\substack{1 \le i \le \ell \\ 1 \le j \le m}}$

U mit Basis $\mathcal{L}_1 \xrightarrow{T}$ V mit Basis $\mathcal{L}_2 \xrightarrow{S}$ W mit Basis $\mathcal{L}_3$

Problem: Berechnung der Matrix $M_{S \circ T}^{\mathcal{L}_1\mathcal{L}_3}$

Also berechne die Bilder der Basisvektoren

Es ist $(S \circ T)(a_k) = S\left(\sum_{j=1}^{m} \beta_{jk} b_j\right) = \sum_{j=1}^{m} \beta_{jk} S(b_j) = \sum_{j=1}^{m} \beta_{jk} \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_{ij} c_i =$

$$= \sum_{i=1}^{\ell} \left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} \beta_{jk} \right) c_i$$

Also: Die Matrix $M_{S \circ T}^{\mathcal{L}_1\mathcal{L}_3}$ ist eine $\ell \times n$-Matrix $\Gamma = (\gamma_{ik})_{\substack{1 \le i \le \ell \\ 1 \le k \le n}}$

und $\gamma_{ik} = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} \beta_{jk}$. Γ heißt das Matrixprodukt von A und B, $\Gamma = A B$

Es ist also $\boxed{\gamma_{ik} = i\text{-te Zeile von } A \text{ mal } k\text{-te Spalte von } B}$

38

Insbesondere: Für Matrizen A und B kann das Matrixprodukt $A \cdot B$ nur gebildet werden wenn

$$\boxed{\text{Spaltenzahl von } A = \text{Zeilenzahl von } B}$$

Beispiele:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

3.14 Rechenregeln

Falls die Produkte zusammenpassen, gilt

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C \qquad \text{Assoziativität}$$

$$\left.\begin{aligned} A\,(B + C) &= A \cdot B + A\,C \\ (A + B) \cdot C &= A \cdot C + B \cdot C \end{aligned}\right\} \text{Distributivität}$$

Beweis: Für lineare Abbildungen gilt es ja auch!

! Achtung: Die Matrixmultiplikation ist im allgemeinen nicht kommutativ!

Selbst für $n \times n$-Matrizen A, B ist i.a. $AB \neq BA$

Beispiel: Sei $S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$S_3 S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad S_1 S_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ also}$$

$$S_1 S_3 = -S_3 S_1, \quad S_1 S_3 + S_3 S_1 = 0 \qquad \text{Geometrisch?}$$

Wichtig in Quantenmechanik!

 39

In Quantenmechanik werden (Observablen usw.) Ort und Impuls durch lineare Abbildungen / Matrizen Q und P beschrieben die der "Heisenbergschen Vertauschungsrelation" $PQ - QP = \frac{\hbar}{i} I$ genügen.

Es zeigt sich P, Q müssen "unendlich" Matrizen sein!

Achtung: Aus $A \cdot B = 0$ folgt nicht $A = 0$ oder $B = 0$

Beispiel: $A = B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, dann $A \neq 0$, $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ nilpotent

3.15 Zusammenfassung.

Ist U Vektorraum mit Basis $\mathcal{L}_1 = \{b_1 \ldots b_n\}$, $u \in U$

$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$, dann sei $u_{\mathcal{L}_1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in K^n$ der Koordinatenvektor von u.

bzgl. der Basis $\mathcal{L}_1$

V Vektorraum mit Basis $\mathcal{L}_2 = \{c_1 \ldots c_m\}$, $T: U \to V$

Dann $M_T^{\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2} = \left(T(b_1)_{\mathcal{L}_2}, \ldots T(b_n)_{\mathcal{L}_2}\right)$

Spaltenvektor.

W Vektorraum mit Basis $\mathcal{L}_3$ $\qquad S: V \to W$

Dann $\quad M_T^{\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2} u_{\mathcal{L}_1} = T(u)_{\mathcal{L}_2}$ und $M_{S \circ T}^{\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_3} = M_S^{\mathcal{L}_2 \mathcal{L}_3} M_T^{\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2}$

3.16 Inverse von Matrizen:

Sei $\underset{\mathcal{L}_1}{T: V} \to \underset{\mathcal{L}_2}{W}$ lineare Abbildung mit Matrix $M_T^{\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2} = M$

T invertierbar $\iff \exists\, T^{-1}: W \to V$ mit $T \circ T^{-1} = I_W$ und

$T^{-1} \circ T = I_V$

$\iff M$ invertierbar, d.h. $\exists\, N$ Matrix mit

$MN = I_{n \times n} \qquad NM = I_{m \times m}$

Es gilt: $N = M_{T^{-1}}^{\mathcal{L}_2 \mathcal{L}_1}$ und man setzt $M^{-1} := N$

[Denn: $M^{-1} \cdot M = M_{T^{-1}}^{\mathcal{L}_2 \mathcal{L}_1} \cdot M_T^{\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2} = M_{T^{-1} \circ T}^{\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_1} = I_V$ usw.]

Ist T bijektiv $\Rightarrow \dim W = \dim V \Rightarrow M$ quadratisch

3.17 Basiswechsel:

Def: Sei V Vektorraum mit Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}' = \{b_1 .. b_n\}$ bzw $\{b_1' .. b_n'\}$

Dann heißt $S := M_I^{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ die Transformationsmatrix für den Basiswechsel von $\mathcal{B}$ auf $\mathcal{B}'$

Eigenschaften:

1) S ist invertierbar (3.16) und $S^{-1} = M_I^{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$

2) Sei $v \in V$ $\quad v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$ also $v_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ und

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i' b_i' \quad \text{also} \quad v_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \lambda_1' \\ \vdots \\ \lambda_n' \end{pmatrix}$$

Dann ist $\quad v_{\mathcal{B}'} = S \cdot v_{\mathcal{B}} = M_I^{\mathcal{B},\mathcal{B}'} v_{\mathcal{B}} \quad$ und $\quad v_{\mathcal{B}} = M_I^{\mathcal{B}',\mathcal{B}} v_{\mathcal{B}'}$

3) Ist $T: V \to V$ linear, dann ist

$$M_T^{\mathcal{B}',\mathcal{B}'} = M_{I \circ T \circ I}^{\mathcal{B}',\mathcal{B}'} = M_I^{\mathcal{B},\mathcal{B}'} M_T^{\mathcal{B},\mathcal{B}} M_I^{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = S \cdot M_T^{\mathcal{B},\mathcal{B}} S^{-1}$$

4) Allgemeiner: Sei $T: U \to V$ $\quad \mathfrak{A}, \mathfrak{A}'$ Basen in U

$$M = M_T^{\mathfrak{A},\mathcal{B}}, \quad S = M_{I_V}^{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \qquad R = M_{I_U}^{\mathfrak{A},\mathfrak{A}'}$$

$$M_T^{\mathfrak{A},\mathcal{B}'} = S M_T^{\mathfrak{A},\mathcal{B}} \qquad M_T^{\mathfrak{A}',\mathcal{B}} = M_T^{\mathfrak{A},\mathcal{B}} M_{I_U}^{\mathfrak{A}',\mathfrak{A}} = M \cdot R^{-1}$$

$$M_T^{\mathfrak{A}',\mathcal{B}'} = M_{I_V}^{\mathcal{B},\mathcal{B}'} M_T^{\mathfrak{A},\mathcal{B}} M_{I_U}^{\mathfrak{A}',\mathfrak{A}} = S M R^{-1}$$

3.18 Äquivalenz und Ähnlichkeit von Matrizen

Behauptung: Sei $S \in M_{n,n}$ invertierbare Matrix und $\mathcal{B} = \{b_1 .. b_n\}$ Basis von V

Dann existiert Basis $\mathcal{B}' = \{b_1' .. b_n'\}$ von V so dass

S Transformationsmatrix: $\quad S = M_{I_V}^{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$

Beweis: In den Spalten der invertierbaren Matrix S^{-1} stehen n lineare unabhängige Koordinatenvektoren, die wir bzgl. $\mathcal{B}$ als die Koordinaten von Vektoren $\{b_1', .. b_n'\} = \mathcal{B}'$ auffassen. Also $\mathcal{B}'$ Basis (lin. unabh + dim $V = n$)

und $\quad S^{-1} = M_{I_V}^{\mathcal{B}',\mathcal{B}} \quad \Rightarrow \quad S = M_{I_V}^{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \quad$ (vgl 3.8)

Also: Jede invertierbare Matrix lässt sich als Transformationsmatrix interpretieren. Multiplikation von rechts bzw links: Koordinaten-Transformation im Urbild bzw. Bildraum.

Def: i) Zwei Matrizen $A, B \in M_{m,n}$ heißen äquivalent, wenn es invertierbare $m \times m$-Matrix S und invertierbare $n \times n$ Matrix R gibt mit

$B = S A R^{-1}$

A und B sind also genau dann äquivalent, wenn sie bzgl. geeigneter Basen dieselbe Abbildung beschreiben (siehe 3.17.4)

(ii) Zwei quadratische Matrizen $A, B \in M_n = M_{n,n}$ heißen ähnlich, wenn es eine invertierbare Matrix $S \in M_n$ gibt mit $B = S A S^{-1}$

d.h. $A = M_T^{\alpha,\alpha}$, $B = M_T^{\alpha',\alpha'}$ für geeignete α, α', T.

3.19 Beispiel.

$V = \mathbb{R}^2$, $\alpha = \{b_1, b_2\} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ $\alpha' = \{b_1', b_2'\} = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\}$

$b_1 = \frac{1}{2} b_1' - \frac{1}{2} b_2'$ $\quad b_2 = \frac{1}{2} b_1' + \frac{1}{2} b_2'$ also

$$S = M_I^{\alpha,\alpha'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$b_1' = b_1 + b_2$, $\quad b_2' = b_1 - b_2$ also

$$S = M_I^{\alpha',\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{Probe} \quad S^{-1} S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

T sei die lineare Abbildung mit

$$M_T^{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 5/2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 5/2 \end{pmatrix} \qquad \text{dann} \quad M_T^{\alpha',\alpha'} = S M_T^{\alpha,\alpha} S^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}!$$

Diagonalmatrix!

Bezüglich α' ist T besonders einfach: Streckung der Basisvektoren

Hauptproblem der linearen Algebra: Finde für geg. T Basis so dass

$M_T^{\alpha,\alpha}$ besonders einfach, möglichst diagonal ist!