[31

## 3. Lineare Abbildungen und Matrizen

### 3.1 Erinnerung: Lineare Abbildungen und lineare Teilräume

$A: V \to W$ heißt linear, falls

- $A(u+v) = A(u) + A(v) \quad \forall u, v \in V$
- $A(\lambda u) = \lambda A(u) \quad \forall \lambda \in K, u \in V$

$\mathcal{L}(V, W) := \{ A: V \to W \text{ linear} \}$

$V_0 \subseteq V$ ist linear Teilraum, falls $u+v \in V_0$ für $u, v \in V_0$ und $\lambda u \in V_0$ für $u \in V_0, \lambda \in K$

Def: Sei $A: V \to W$ linear

$\operatorname{Ker} A := \{ u \in V : A(u) = 0 \}$ ist linearer Teilraum von $V$ und heißt Kern von A

$\operatorname{Bild} A := \{ A(u) : u \in V \}$ ist linearer Teilraum von $W$ und heißt Bild von A

Allgemeiner:

Ist $V_0 \subseteq V$ linearer Teilraum, dann $A(V_0) := \{ A(u) : u \in V_0 \}$ linearer Teilraum.

Ist $W_0 \subseteq W$ linearer Teilraum, dann $A^{-1}(W_0) := \{ u \in V : A(u) \in W_0 \}$ linearer Teilraum.

(also $\operatorname{Ker} A = A^{-1}(\{0\})$)

### 3.2 Operationen mit lin. Abbildungen

Seien $U, V, W$ Vektorräume

1) $I: V \to V : x \mapsto x$ heißt identische Abbildung / Identität

2) $O: V \to W : x \mapsto o_W$ (Nullelement) heißt Null Abbildung

3) Sind $A, B: V \to W$ lineare Abbildungen, so sind $\lambda A: V \to W \quad x \mapsto \lambda A(x)$ und

$A + B: V \to W : x \mapsto Ax + Bx$ auch lineare Abbildungen

$\mathcal{L}(V, W)$ ist selbst wieder ein Vektorraum.

4.) Sind $A: V \to W$, $B: U \to V$ lineare Abbildungen, so ist

$A \circ B: U \to W$ lin. Abb., das Produkt (oder die Komposition) von A und B.

Man schreibt auch $A \cdot B$ oder $AB$. Das Produkt ist associativ, d.h. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

### 3.3 Satz: (injektive lineare Abbildungen)

Für $A: V \to W$ linear sind äquivalent

(a) $\operatorname{Ker} A = \{0\}$

(b) $A$ ist injektiv

32

**Beweis:** (a) $\Rightarrow$ (b): Seien $u, v \in V$, $Au = Av$

$\Rightarrow A(u-v) = 0 \Rightarrow u - v \in \operatorname{Ker} A \overset{(a)}{\Rightarrow} u - v = 0 \Rightarrow u = v$ (also Injektivität)

(b) $\Rightarrow$ (a): Sei $v \in \operatorname{Ker} A \Rightarrow Av = 0 \Rightarrow Av = A0 = 0 \overset{(b)}{\Rightarrow} v = 0 \Rightarrow \operatorname{Ker} A = \{0\}$. ■

### 3.4. Der allgemeine Fall (Die Dimensionsformel)

**Satz:** Sei $A : V \to W$ linear und $\dim V < +\infty$. Dann gilt

$$\dim V = \dim \operatorname{Bild}(A) + \dim \operatorname{Ker}(A)$$

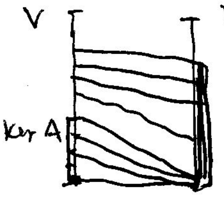
**Beweis:** $A$ injektiv ✓

Sei $\{b_1 \dots b_k\}$ Basis für $\operatorname{Ker} A$. Ergänze zu Basis $\{b_1 \dots b_k, b_{k+1} \dots b_n\}$ für $V$.

Dann $\operatorname{Bild}(A) = \operatorname{lin}\{A(b_1), A(b_2) \dots A(b_n)\} = \operatorname{lin}\{A(b_{k+1}) \dots A(b_n)\}$

Zeige $A(b_{k+1}) \dots A(b_n)$ linear unabhängig, dann fertig:

Sei $\lambda_{k+1} A(b_{k+1}) + \dots + \lambda_n A(b_n) = 0$ und $v = \lambda_{k+1} b_{k+1} + \dots + \lambda_n b_n$, dann $v \in \operatorname{Ker} A$. Jedes $v \in \operatorname{Ker} A$ ist aber auf eindeutige Weise Linearkombination von $b_1 \dots b_k$ $\Rightarrow \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = 0 \Rightarrow$ lin. unabhängig. ■




**Folgerung:** $A$ injektiv $\Rightarrow \dim V = \dim \operatorname{Bild} A$, also $\{b_1 \dots b_n\}$ Basis von $V$ $\Rightarrow A(b_1) \dots A(b_n)$ Basis von $\operatorname{Bild} A$.

**Bem:** $\operatorname{Rang} A := \dim \operatorname{Bild} A$ : Der Rang von $A$ □

### 3.5 Satz (lineare Abbildungen auf Basen)

Sei $\{b_1 \dots b_n\}$ Basis von $V$ und $\{w_1 \dots w_n\}$ Vektoren in $W$.

Es existiert genau eine lineare Abbildung $A : V \to W$ mit $A(b_1) = w_1 \dots A(b_n) = w_n$

**Beweis:** $A\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i\right) := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i$ ist wohldefiniert, da Koeffizienten $\lambda_i$ eindeutig bestimmt sind. Linearität, Eindeutigkeit klar. ■

**Bemerkung:** Spezialfall $V = \mathbb{K}^n$, $b_i = e_i$ (vgl. 2.8)

**3.6 Satz:** Wie in 2.8 gilt:

(1) $\operatorname{lin}\{w_1 \dots w_n\} = W \Leftrightarrow A$ surjektiv

(2) $\{w_1 \dots w_n\}$ lin. unabhängig $\Leftrightarrow A$ injektiv

(3) $\{w_1 \dots w_n\}$ Basis in $W \Leftrightarrow A$ bijektiv (Isomorphismus)

**Beweis:** wie in 2.8: Ersetze $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ durch $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$ ■

## 3.7. Die Matrix einer linearen Abbildung

Sei $A: V \to W$ lineare Abbildung

$\mathcal{L} := \{b_1 \dots b_n\}$ Basis von $V$ $\quad A(b_i) = w_i \in W$

Nach 3.5 ist $A$ die einzige lineare Abbildung von $V$ nach $W$ mit $b_i \mapsto w_i$.

Sei $\mathcal{L}' := \{c_1, \dots c_m\}$ Basis von $W$, dann

$w_j = \alpha_{1j} c_1 + \alpha_{2j} c_2 + \dots + \alpha_{mj} c_m$ und $w_j$ ist durch die Koordinaten

$(\alpha_1, \dots \alpha_m)$ eindeutig bestimmt.

> Also: Sind die Basen $\mathcal{L}$ von $V$ und $\mathcal{L}'$ von $W$ vorgegeben, so ist $A$ durch die $n \cdot m$ Zahlen $\{\alpha_{ij} : 1 \le i \le m, \; 1 \le j \le n\}$ vollständig bestimmt.

<u>Konvention</u>: Schreibe die $\alpha_{ij}$ in die Form

$$M := M_A^{\mathcal{L},\mathcal{L}'} := \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} = (\alpha_{ij})_{\substack{i=1\dots m \\ j=1\dots n}}$$

in den Spalten stehen (die Koordinaten der) Bilder der Basisvektoren.

> $M = M_A^{\alpha,\alpha'}$ heißt die $m \times n$ Matrix der lineare Abbildung $A$ bzgl. der Basen $\mathcal{L}$ von $V$ und $\mathcal{L}'$ von $W$.

<u>Bemerkungen</u>: 1) $n = \dim V$, $m = \dim W$

2) Bei festen Basen $\mathcal{L}$ von $V$, $\mathcal{L}'$ von $W$ hat man also eine 1-1 Beziehung zwischen lin. Abbildungen von $V$ nach $W$ und $m \times n$ Matrizen.

$$A \leftrightarrow M_A^{\alpha,\alpha'}$$

Sei $M_{m,n} = M_{m,n}(K) = \{m \times n \text{ Matrizen}\}$

3) Seien $\mathcal{E} := \{e_1 \dots e_n\}$ und $\mathcal{E}' = \{f_1 \dots f_m\}$ die kanonische Basen von $\mathbb{K}^n$ und $\mathbb{K}^m$. Dann gehört insbesondere zu jeder $m \times n$ Matrix $M$ genau eine lineare Abbildung $A: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ mit $M = M_A^{\alpha,\alpha'}$.

In den Spalten von $M_A^{\alpha,\alpha'}$ stehen die Vektoren $A(e_j)$ $j = 1 \dots n$

4) Sei $M = M_A^{\mathcal{E},\mathcal{E}'}$, sind $\mathcal{L}$ bzw. $\mathcal{L}'$ Basen von $V$ bzw. $W$ mit $\dim V = n$, $\dim W = m$, so ist dieselbe Matrix $M$ auch die Matrix genau einer lin. Abbildung $R: V \to W$, $M = M_R^{\mathcal{L}\mathcal{L}'}$.

Wie hängen $R$ und $A$ zusammen?

Sei $K_n: \mathbb{K}^n \to V$, $e_i \mapsto b_i$, $K_m: \mathbb{K}^m \to W$ $f_j \mapsto c_j$ die Koordinatenabbildungen (vgl. 2.8) (Isomorphismen)

Dann ist das Diagramm kommutativ:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}^n \arrow[r, "A"] \arrow[d, "K_n"'] & \mathbb{K}^m \arrow[d, "K_m"] \\ V \arrow[r, "R"] & W \end{tikzcd}$$

also $R \circ K_n = K_m \circ A$ (oder $R = K_m \circ A \circ K_n^{-1}$)

Das werden wir bald besser verstehen (hoffentlich)

<u>Wir merken uns schon jetzt:</u>

$R$ und $A$ unterscheiden sich nur durch VR-Isomorphismen

$\Rightarrow$ dim Ker und Rang = dim Bild sind für $R$ und $A$ gleich.

Daher genügt es oft, eine Matrix als die Matrix einer lin. Abbildung $A: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ zu interpretieren. Wer will, kann sich das im folgenden so verstehen, auch wenn es allgemeiner formuliert ist.

## 3.8 Beispiele für das Aufstellen von Matrizen.

1) Die Nullabbildung $O: V \to W$ hat in jeder Basis die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{m \times n}$

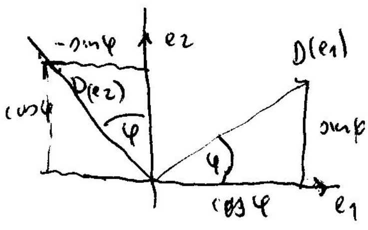
2) Die identische Abbildung $I: V \to V$ bzgl. einer Basis $\mathcal{L}$ hat die Matrix

$$M_I^{\mathcal{L}\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

<u>Achtung:</u> $M_I^{\mathcal{L}\mathcal{L}'}$ sieht anders aus, falls $\mathcal{L}' \neq \mathcal{L}$ ("Transformationsmatrizen")

3) $D: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ Drehung um Winkel $\varphi$ bzgl. kan. Basis $\{\underset{e_1}{\binom{1}{0}}, \underset{e_2}{\binom{0}{1}}\} = \mathcal{E}_2$

$D(e_1) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$ $\quad D(e_2) = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$ bzgl. $\mathcal{E}_2$




Also

$$M_D^{\mathcal{E}_2\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$