2. Lineare Unabhängigkeit, Basen, Koordinaten, Dimension

2.1. Problematik:

i) $\mathcal{E} = \{ \vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{b} + \mu \vec{c} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}$ eine Ebene. Wirklich? Falls nicht, wie groß?

$\vec{y} \in \mathcal{E} \Rightarrow \lambda = ?, \mu = ?$ λ, μ eindeutig bestimmt $\rightarrow$ (Unabhängigkeit)

ii) Auch Funktionen sind Vektoren.

Also: $g_1, \dots g_n, f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen

Finde $\lambda_1, \dots \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \dots + \lambda_n g_n = f$

Wie geht es für gebiet? Wir brauchen: Koordinaten

iii) Es gibt so viele Vektorräume. Wie verschieden sind sie, und wie groß? $\rightarrow$ Dimension

2.2 Sei V ein Vektorraum über K und $W \subseteq V$

Sei $\langle W \rangle := \text{lin}(W) :=$ Menge aller endlichen Linearkombinationen aus W

$$= \{ v \in V : \exists n \in \mathbb{N} \ \exists \lambda_1, \dots \lambda_n \in K, \exists w_1, \dots w_n \in W \quad v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i \}$$

$\langle W \rangle$ ist Untervektorraum von V und heißt

lineare Hülle oder Aufspann von W.

Dabei heißt W erzeugendes System für $\langle W \rangle$.

Bemerkung: Häufig besteht W aus endlich vielen Elementen $\{ w_1, \dots w_m \}$

Dann $\text{lin}(W) = \{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i w_i : \lambda_i \in K \}$

Konvention: $\text{lin}(\emptyset) = \{0\}$

Beispiel: i) $V = \mathbb{R}^n$, $K = \mathbb{R}$ $\quad W = \{e_1, \dots e_n\}$ kanonische Basisvektoren

$\Rightarrow \langle W \rangle = V$

ii) $V = E_3$, $K = \mathbb{R}$, $W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \text{lin}(W) =$ "x-y Ebene"

iii) $V = \{ f : f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ Funktion} \}$, $K = \mathbb{R}$

$W = \{ x \mapsto x^n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \} \Rightarrow \text{lin}(W) =$ Vektorraum der Polynome

iv) $\text{lin}(V) = V$

23 Satz: Seien $v_1, v_2, \dots v_n \in V$ $(n \geq 1)$ eine System von n-Vektoren. Dann sind äquivalent

(a) Ist $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$, so sind die Koeffizienten λ_i eindeutig bestimmt, d.h.,

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \quad \text{und} \quad v = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i \quad \Rightarrow \lambda_i = \mu_i \quad \text{für alle} \quad 1 \leq i \leq n.$$

(b) Ist $0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$, so gilt $\lambda_i = 0$ für alle $1 \leq i \leq n$

(c) Keiner der Vektoren $v_1, \dots v_n$ ist Linearkombination der übrigen

(d) Die lineare Hülle jeder echten Teilsystem von $v_1 \dots v_n$ ist echt kleiner als $\text{lin}(\{v_1, \dots v_n\})$

Beweis: (a) ⇒ (b) : $\sum_{i=1}^{n} 0 \cdot v_i = 0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \quad \Rightarrow \quad \lambda_i = 0$ nach (a)

(b) ⇒ (a) : Ist $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$ und $v = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i \Rightarrow$

$$0 = v - v = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \mu_i) v_i \quad \Rightarrow \lambda_i - \mu_i = 0 \text{ für alle } 1 \leq i \leq n \text{ nach (b)}$$

(b) ⇒ (c) :
(also $\neg(c) \Rightarrow \neg(b)$) OBdA $v_n = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i v_i$, dann $0 = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i v_i - v_n$
also gilt (b) auch nicht

(c) ⇒ (b) : Ist $0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$ mit $\lambda_n \neq 0$, dann
(also $\neg(b) \Rightarrow \neg(c)$)

$$v_n = -\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\lambda_n} v_i \quad \text{also gilt (c) auch nicht.}$$

(c) ⇔ (d): $v_n = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i v_i \iff \text{lin}(\{v_1 \dots v_n\}) = \text{lin}(\{v_1, \dots v_{n-1}\})$

24 Def: i) Das System der Vektoren $\{v_1, \dots v_n\}$ heißt <u>linear unabhängig</u>, falls sie die äquivalente Bedingungen des Satzes erfüllt, sonst <u>linear abhängig</u>.
($\emptyset$ sei linear unabhängig)

ii) Allgemeiner heißt eine Familie $(v_i)_{i \in I}$ <u>linear unabhängig</u>, falls jedes endliche Teilsystem linear unabhängig ist.

iii) Ist darüberhinaus $V = \text{lin}(\{v_1 \dots v_n\})$ (oder $V = \text{lin}(\{v_i : i \in I\})$, d.h. jeder Vektor in V ist endliche Linearkombination der v_i, dann heißt $\{v_i : i \in I\}$ eine Basis von V.

Bem: In diesem Fall gilt also: Jeder Vektor von V läßt sich auf genau eine Weise als endliche Linearkombination von Vektoren in $\{v_i : i \in I\}$ schreiben.

Bem: Ist $\{v_1 \dots v_n\}$ Basis von V und $w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$, so heißen die Koeffizienten λ_i auch die Koordinaten von w bezüglich dieser Basis
$(\lambda_1 \dots \lambda_n)$ Koordinatenvektor

Bem: Ist $\{v_1 \dots v_n\}$ Basis von V, so ist die Dimension von $V = n$.
$\dim V = n$. (Später: Dimension ist unabhängig von Basis)
z.B. $\{e_1, \dots e_n\}$ kan. Basis in $\mathbb{R}^n$ $\Rightarrow$ $\mathbb{R}^n$ ist n-dimensional (über $\mathbb{R}$)

2.5 Diskussion:

(i) $\{v\}$ ist linear abhängig $\Leftrightarrow v = 0$

(ii) $\{v_1, v_2\}$ linear abhängig $\Leftrightarrow$ $v_1 = 0$ oder $v_2 = 0$ oder $\lambda v_1 = v_2$ (parallele Vektoren)

(iii) $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\} \subseteq \mathbb{R}^3$

- linear unabhängig $\Leftrightarrow$ lin. Kombinationen erzeugen $\mathbb{R}^3$
- linear abhängig $\Leftrightarrow$ liegen in einer Ebene durch 0 (oder sogar auf einer Gerade)

(iv) Falls $0 \in \{v_1, v_2, \dots v_n\}$ dann $\{v_1, v_2, \dots v_n\}$ linear abhängig.

(v) $\{v_i : i \in I\}$ linear unabhängig $\Rightarrow$ jede Teilmenge ist linear unabhängig.

(vi) $\{v_i : i \in I\}$ linear unabhängig $\Rightarrow$ $\{v_i : i \in I\}$ Basis von $W = \mathrm{lin}(\{v_i : i \in I\})$

(vii) $\{v_i : i \in I\}$ Basis von V, $w \in V$ $\Rightarrow$ das System $v_i, i \in I$, w linear abhängig.

2.6. Beispiel (i) $\{e_i : i = 1 \dots n\} \subseteq \mathbb{K}^n$ ist Basis von $\mathbb{K}^n$

(ii) Sei $p_n : \mathbb{R} \ni x \mapsto x^n \in \mathbb{R}$
$\mathbb{C} \ni z \mapsto z^n \in \mathbb{C}$

Dann ist $\{p_n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ im Vektorraum der Funktionen linear unabhängig

Beweis: $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i p_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=0}^{n} \lambda_i p_i(x) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i x^i = 0$
das Polynom hat mehr als n Nullstellen $\Rightarrow$ ist sie das 0-Polynom also: $\lambda_i = 0$.

(iii) Die Funktionen auf $[0, 2\pi]$
$\mathbb{1}$ = Konst. 1. $\{\cos nx : n \in \mathbb{N}\}$ $\{\sin nx : n \in \mathbb{N}\}$ sind linear unabhängig

(iv) Sind $a_1, \dots a_k \in \mathbb{K}^n$, so daß a_j links mehr Nullen hat als a_i für $j > i$ dann sind $a_1, \dots a_k$ lin. unabhängig.

2.7. Orthonormalsysteme:

Def: Ein System $\{e_1 \ldots e_k\} \subseteq \mathbb{C}^n$, heißt Orthonormalsystem (ONS), falls

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} = \delta_{ij} \quad \text{Dirac - Delta}$$

also: $e_i \perp e_j \quad i \neq j$ (Orthogonal) und $\|e_i\|_2 = 1$ (Normalisiert)

Beispiel: (i) die kanonische Basisvektoren in $\mathbb{C}^n$ formen ein ONS.

(ii) $e_1 = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} \Rightarrow \{e_1, e_2\}$ ONS

Satz: $\{e_1 \ldots e_k\}$ ONS $\Rightarrow \{e_1 \ldots e_k\}$ linear unabhängig

Beweis: Sei $0 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i \Rightarrow 0 = \langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle e_i, e_j \rangle = \lambda_j$ ∎

2.8 Warum sind linear unabhängige Vektoren wichtig?

Will zeigen: Mit linear unabhängigen Vektoren kann man Koordinaten einführen und wie im $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) rechnen.

Sei $\{v_1 \ldots v_n\} \subseteq V$

Definiere: $T: \mathbb{K}^n \to V, \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \in V$

Dann ist T linear (leicht)!

Satz: 1.) Äquivalent sind:

(a) $\mathrm{lin}\{v_1 \ldots v_n\} = V$

(b) T ist surjektiv

2.) Äquivalent sind:

(a) $\{v_1 \ldots v_n\}$ linear unabhängig

(b) T injektiv

3.) Äquivalent sind:

(a) $\{v_1 \ldots v_n\}$ ist Basis von V

(b) T ist bijektiv

Beweis: 1) a) $\Rightarrow$ b): Für $w \in V \ \exists \lambda_1 \ldots \lambda_n \in \mathbb{K}: w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = T\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$

b) $\Rightarrow$ a): Für $w \in V \ \exists \lambda_1 \ldots \lambda_n \in \mathbb{K}: w = T\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$

2) $T\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i \Leftrightarrow \sum_{i=1} (\lambda_i - \mu_i) v_i = 0$

Also: T nicht injektiv $\Leftrightarrow \{v_1 \ldots v_n\}$ nicht linear unabhängig.

3.): aus 1) und 2)

2.9 Def: Sei V, W Vektorraum über K.

Ist $T: V \to W$ linear und bijektiv, so heißt T

<u>(Vektorraum) - Isomorphismus</u>. Dann ist auch T^{-1} VR-Isomorphismus

V und W heißen <u>isomorph</u>, falls es VR - Isomorphismus $T: V \to W$ gibt

Wir schreiben: $V \cong W$

Isomorphe Vektorräume sind als Vektorräume gleich.

Also: ist $\{v_1 .. v_n\}$ Basis von V, so ist V isomorph zu K^n.

2.10 Beispiel: $V = \{$ Polynome von Grad $\leq n \}$ über $K = \mathbb{R}$

$p_0 = 1\!\!1$, $p_1(x) = x$, $p_n(x) = x^n$ dann

$p_0, p_1, .. p_n$ Basis in V

$T: \mathbb{R}^{n+1} \to V \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mapsto a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ ist VR - Isomorphismus.

2.11 Frage: Besitzt jeder VR eine Basis?

<u>Def</u>: Ein Vektorraum V heißt <u>endlich erzeugt</u>, falls es endlich vielen Vektoren

$v_1, .. v_k \in V$ gibt mit $V = \text{lin}\{v_1, .. v_k\}$

2.12 Hauptsatz: Sei V Vektorraum

(1) Ist V endlich erzeugt, so besitzt V eine Basis

(2) Besitzt V eine Basis aus n Elementen, so sind je $n+1$ Vektoren in V linear abhängig.

(3) Besitzt V eine Basis aus n Elementen, so hat jede Basis von V genau n-Elementen

<u>Beweis</u>: (1) Durch Ausdünnen.

Sei $V = \text{lin}\{v_1 .. v_k\}$. Streiche solange wie möglich Vektoren

aus $\{v_1 .. v_k\}$ heraus, so dass die lineare Hülle des Restes immer noch V ergibt.

Wenn nichts mehr geht, hat man eine Basis (vgl. 2.3 d)). Dies geschieht nach

endlich vielen Schritten.

(2) Wir wissen $V \cong K^n$. Es reicht also die Behauptung in K^n zu beweisen.

Seien $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \dots \vec{a}_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{1(n+1)} \\ \vdots \\ a_{n(n+1)} \end{pmatrix}$ $n+1$ Vektoren in K^n

$\vec{a}_i$ sind lin. abhängig $\Leftrightarrow$ $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \vec{a}_i = 0$ hat nicht-triviale Lösungen.

Dies ist genau dann wenn das LGS

$$\begin{matrix} \lambda_1 a_{11} + \dots & + \lambda_{n+1} a_{1(n+1)} = 0 \\ \vdots & \vdots \\ \lambda_1 a_{n1} + \dots & + \lambda_{n+1} a_{n(n+1)} = 0 \end{matrix}$$

mit n Zeilen und $(n+1)$ Spalten nicht triviale Lösung hat.

Umformen auf Zeilenstufenform $\Rightarrow$ Behauptung (vgl. 1.23)

Zur Illustration: $n = 2$

$$\begin{matrix} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{12} + \lambda_3 a_{13} = 0 \\ \lambda_1 a_{21} + \lambda_2 a_{22} + \lambda_3 a_{23} = 0 \end{matrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{matrix} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{12} + \lambda_3 a_{13} = 0 \\ \lambda_2 b_{22} + \lambda_3 b_{23} = 0 \end{matrix} \quad \rightsquigarrow \text{ Nicht triviale Lösung}$$

(3): Aus (2): Sei $\{v_1 .. v_n\} \subseteq V$ und $\{w_1 .. w_k\} \subseteq V$ Basis

Dann: $k > n \overset{(2)}{\Rightarrow} \{w_1 .. w_k\}$ linear abhängig $\Rightarrow$ Widerspruch

$n > k \Rightarrow \{v_1 .. v_n\}$ linear abhängig $\Rightarrow$ Widerspruch

<u>Folgerung</u>: Ein endlich erzeugter VR ist isomorph zu einem VR der Form K^n für genau ein n.

<u>2.13 Def:</u> Ist $\{v_1 .. v_n\} \subseteq V$ Basis von V, dann heißt n die <u>Dimension von V</u> $\dim V = n$. n ist eindeutig bestimmt. Besitzt V keine endliche Basis, dann heißt V <u>unendlich-dimensional</u> $\dim V = \infty$.

<u>2.14 Ergänzung</u>: (a) 2.12 (1) gilt allgemein: Jeder Vektorraum hat eine Basis! Beweis mit "Zornschem Lemma".

(b) Meist leitet man 2.12 ab aus dem <u>Basisergänzungssatz</u>: Seien $v_1 .. v_k \in V$ linear unabhängig und $w_1 .. w_l \in V$, so dass $\text{lin}\{v_1 .. v_k, w_1 .. w_l\} = V$. Dann kann man durch Hinzunahme geeigneter Vektoren in $\{w_1 .. w_l\}$ die Menge $\{v_1 .. v_k\}$ in eine Basis ergänzen.

Damit ist klar:

<u>2.15 Korollar:</u> Sei V n-dimensionaler Vektorraum, $U \subseteq V$ Unterraum, dann ist $\dim U \leq \dim V$ und $\dim U = \dim V \Leftrightarrow U = V$.

2.16 Skalarprodukte:

Berechnung der Koeffizienten am besten bzgl. Orthonormalbasen

Def: V Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}/\mathbb{C}$

Eine Abbildung

$V \times V \to \mathbb{K}$: $(u,v) \mapsto \langle u,v \rangle$ heißt (abstraktes) Skalarprodukt auf V, falls

$\forall u,v,w \in V$, $\lambda,\mu \in \mathbb{K}$

(SP1) $\langle \lambda u + \mu v, w \rangle = \lambda \langle u,w \rangle + \mu \langle v,w \rangle$

(SP2) $\langle u,v \rangle = \overline{\langle v,u \rangle}$

(SP3) $\langle u,u \rangle \geq 0$, $\langle u,u \rangle = 0 \iff u = 0$

Ein Vektorraum mit Skalarprodukt $(V, \langle , \rangle)$ heißt auch prä-Hilbertraum

euklidischer Raum ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) oder unitärer Raum ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

Diskussion:

(1) (SP1): $\forall w$ ist $V \to \mathbb{K}$: $u \mapsto \langle u,w \rangle$ linear

(2) (SP1)+(SP2): $\forall w$ ist $V \to \mathbb{K}$: $u \mapsto \langle w,u \rangle$ antilinear ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

d.h. $\langle w, \lambda u + \mu v \rangle = \bar{\lambda} \langle w,u \rangle + \bar{\mu} \langle w,v \rangle$

(3) $\langle u,v \rangle = 0 \quad \forall v \in V \iff u = 0$ (setze $v = u$)

(4) In der Physik sind Skalarprodukte oft antilinear in der ersten Komponente (Dirac-Schreibweise in der Quanten Mechanik) $\Rightarrow$ Geht aber genauso.

2.17 Beispiel:

(1) Standard-Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n / \mathbb{C}^n$

(2) Sei $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ Intervall

Für $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}/\mathbb{C}$ stetig setze

$$\langle f,g \rangle := \int_a^b f(x)\,\bar{g}(x)\,dx$$

Allgemeiner:

Sei $w : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ strikt positiv „Gewichtsfunktion"

$$\langle f,g \rangle := \int_a^b f(x)\,\bar{g}(x)\,w(x)\,dx$$

Skalarprodukte sind auch wichtig in Analysis.

27

2.18 Cauchy-Schwarz-Ungleichung (vgl 1.12)

Für $x, y \in V$ gilt

$$|\langle x,y\rangle| \leq \langle x,x\rangle^{1/2} \cdot \langle y,y\rangle^{1/2}$$ und

"=" genau dann wenn $\{x,y\}$ linear abhängig.

Beweis: i) Ist $\langle x,y\rangle = 0$, so ist die Ungleichung trivial

ii) $\langle x,y\rangle \neq 0$. Setze $\alpha = \frac{\overline{\langle x,y\rangle}}{|\langle x,y\rangle|}$, dann $\alpha \in \mathbb{K}$ $|\alpha| = 1$,

Betrachte $p(\lambda) := \langle \alpha x + \lambda y, \alpha x + \lambda y\rangle = \langle x,x\rangle + \alpha\bar{\lambda}\langle x,y\rangle + \bar{\alpha}\lambda\langle y,x\rangle + |\lambda|^2\langle y,y\rangle$

Für $\lambda \in \mathbb{R}$: $p(\lambda) = \langle x,x\rangle + \lambda \cdot 2\operatorname{Re} \alpha\langle x,y\rangle + \lambda^2 \cdot \langle y,y\rangle = \langle x,x\rangle + 2|\langle x,y\rangle| \cdot \lambda + \langle y,y\rangle \cdot \lambda^2$

Also ist $p(\lambda)$ ein Polynom mit Grad $p = 2$ und $p(\lambda) \geq 0$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

D.h. $p(\lambda) = 0$ hat maximal eine $\mathbb{R}$ Lösung, und die Diskriminante

"$b^2 - 4ac$" $\quad 4|\langle x,y\rangle|^2 - 4\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle \leq 0 \quad \Rightarrow$ Cauchy-Schwarz-Ungleichung.

Hat man hier "=", heisst dann, dass $p(\lambda) = 0$ genau eine Lösung $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ hat also

$p(\lambda_0) = 0 \underset{(SP3)}{\Rightarrow} \alpha x + \lambda_0 y = 0 \Rightarrow x = -\frac{\lambda_0}{\alpha} y \Rightarrow$ lin abhängig. ∎

2.19 Sei $(V, \langle,\rangle)$ Vektorraum mit Skalarprodukt, dann ist $\|x\| := \langle x,x\rangle^{1/2}$ eine Norm auf V

denn: $\|x\| = \langle x,x\rangle^{1/2} \geq 0$

$\|\lambda x\| = \langle \lambda x, \lambda x\rangle^{1/2} = |\lambda|\langle x,x\rangle^{1/2} = |\lambda| \cdot \|x\|$

$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + 2\operatorname{Re}\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle \leq$

$\leq \langle x,x\rangle + 2|\langle x,y\rangle| + \langle y,y\rangle \underset{\text{C.S.U.}}{\leq}$

$\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$

2.20 Def. Die Abbildung $Q: V \to \mathbb{R}_+$, $v \mapsto Q(v) := \langle v,v\rangle = \|v\|^2$ heisst auch die zugehörige <u>quadratische Form</u> (denn $Q(\lambda x) = |\lambda|^2 Q(x)$)

Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ so ist:

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left(Q(x+y) - Q(x-y)\right)$$ Beweis durch Nachrechnen

Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ so ist:

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left(Q(x+y) - Q(x-y) - i\,Q(x-iy) + i\,Q(x+iy)\right)$$ Beweis durch Nachrechnen

→ Polarisierung: Ein Skalarprodukt ist also durch die zugehörige quadratische Form schon vollständig festgelegt.

2.21 Orthogonalität. (vgl. 1.12)

Sei V Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$

i) $x, y \in V$ heißen Orthogonal $x \perp y$, falls $\langle x, y\rangle = 0$

ii) $M, N \subseteq V$ heißen Orthogonal $M \perp N$, falls $x \perp y \quad \forall x \in M \ \forall y \in N$

iii) Für $M \subseteq V$ heißt $M^\perp := \{y \in V : y \perp x \ \forall x \in M\}$

das orthogonale Komplement von M.

$M^\perp$ ist linearer Unterraum in V. (auch wenn M nur eine Teilmenge ist)

iv.) $x \perp y \Rightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ (vgl 1.12) (Satz von Pythagoras)

v.) Eine Familie $(v_i)_{i \in I}$ heißt Orthonormalsystem falls

$v_i \perp v_j \quad i \neq j$ (Orthogonal)

$\|v_i\| = 1$ (Normaliesiert)

Ist $\{e_1 .. e_n\}$ ONS und Basis, so heißt es auch Orthonormalbasis (ONB)

vi.) $(v_i)_{i \in I}$ ONS $\Rightarrow$ $\{v_i : i \in I\}$ linear unabhängig (vgl. 2.7)

2.22 Entwicklung nach ONS

Sei $\{e_1 .. e_n\}$ ONB für V

(1) Ist $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$, so ist $\lambda_i = \langle v, e_i\rangle$, d.h. $v = \sum_{i=1}^n \langle v, e_i\rangle e_i$

(2) Ist $u = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \quad v = \sum_{i=1}^n \mu_i e_i$ so ist

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \bar{\mu}_i = \left\langle \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{C}^n}$$

Insbesondere gilt also $\|u\|^2 = \langle u, u\rangle = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle u, e_i\rangle|^2$ Parsevalsche-Gleichung

Die Koordinaten-Abbildung

$T: \mathbb{K}^n \to V : \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_i \lambda_i e_i$ führt Standard-Skalarprodukt auf $\mathbb{K}^n$ über in $\langle\ ,\ \rangle_V$

"erhält das Skalarprodukt und die Norm" ($\Rightarrow$ Cauchy-Schwartz Ungleichung)

<u>Beweis</u>: 1) $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \quad \langle v, e_j\rangle = \langle \sum \lambda_i e_i, e_j\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle e_i, e_j\rangle = \lambda_j$

2) $\langle u, v\rangle = \langle \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^n \mu_j e_j\rangle = \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \bar{\mu}_j \langle e_i, e_j\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \bar{\mu}_i$

2.23 Beispiele:

(1) $V = C([0,2\pi]) = \{f : [0,2\pi] \to \mathbb{R} \text{ stetig}\}$

$$\langle f,g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx \qquad \|f\| = \langle f,f\rangle^{1/2} = \left(\int_0^{2\pi} f(x)^2\,dx\right)^{1/2}$$

$$e_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathbb{1} \qquad e_{2n}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx \quad n\geq 1 \qquad e_{2n-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx \quad n\geq 1$$

Dann ist $\{e_n : n\geq 0\}$ ONS (insbesondere lin. unabhängig)

Also gilt: Ist $f \in \text{lin}\{e_n : n\geq 0\}$ dann

$$f = \sum \lambda_n e_n \quad \text{endliche Summe}$$

$$= c\cdot\mathbb{1} + \sum_n a_n \sin nx + b_n \cos nx$$

mit $c\cdot\sqrt{2\pi} = \langle f,e_0\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,dx$

$a_n\sqrt{\pi} = \langle f,e_{2n-1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx \qquad b_n\cdot\sqrt{\pi} = \langle f,e_{2n}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx$

Theorie der Fourier-Reihen: Läßt man auch unendliche Summen zu, so kann man praktisch "jede" Funktion so entwickeln. (Fourierreihen sind also LA)

(2) In $\mathbb{R}^2$ ist $e_1 := \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}$ $e_2 := \begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{pmatrix}$ ONB (vgl. 2.7 ii))

Also ist z.B. $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$ mit $\lambda_1 = 2\cos\varphi$ $\lambda_2 = -2\sin\varphi$

allgemein: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$ mit $\lambda_1 = x\cos\varphi + y\sin\varphi$

$\lambda_2 = -x\sin\varphi + y\cos\varphi$

2.24. Orthogonale Projektion.

Sei $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ Vektorraum mit Skalarprodukt, $\{e_1 \ldots e_m\}$ ONS

$V_0 := \text{lin}\{e_1 \ldots e_m\}$, $x\in V$ $\lambda_i := \langle x,e_i\rangle$

Falls $V_0 = V$, dann ist $\{e_1 \ldots e_m\}$ Basis, also $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i e_i$

? Falls $V_0 \neq V$? Was ist $\sum_{i=1}^m \lambda_i e_i$?

(Es ist $\lambda_i e_i$ die orthogonale Projektion auf die von e_i aufgespannte Gerade (vgl 1.13))

Satz (wichtig): Für $y\in V_0$ sind äquivalent

(a) $y = \sum_{i=1}^m \lambda_i e_i$

(b) $x = y + z$ und $x - y = z \perp V_0$

(c) $\|x-y\| \leq \|x-y'\| \quad \forall y'\in V_0$

30

Beweis: (nicht so wichtig)

(a)⇒(b): Sei $y' \in V_0$ $\quad y' = \sum_{i=1}^m \mu_i e_i$, dann

$$\langle z, y'\rangle = \langle x-y, y'\rangle = \langle x, y'\rangle - \langle y, y'\rangle = \sum_{i=1}^m \bar{\mu}_i \underbrace{\langle x, e_i\rangle}_{\lambda_i \text{ nach Def}} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \bar{\mu}_i = 0.$$

(b) ⇒ (a): Sei $y \in V_0$ mit $z := x - y \perp V_0$, dann

$$\langle y, e_i\rangle = \langle x - z, e_i\rangle = \langle x, e_i\rangle - \underbrace{\langle z, e_i\rangle}_{0} = \langle x, e_i\rangle = \lambda_i$$

(b) ⇔ (c): Wegen (a) ⇔ (b) existiert Zerlegung $x = y + z$ wie in b)

Sei nun $y' \in V_0$ beliebig, dann $y' = y + \bar{y}$ $\quad \bar{y} \in V_0$, also

$$\|x - y'\|^2 = \|y + z - y - \bar{y}\|^2 = \|z - \bar{y}\|^2 = \|z\|^2 + \|\bar{y}\|^2 \quad \text{da } z \perp \bar{y}$$

$\geq \|z\|^2$ und

$= \|z\|^2$ genau dann wenn $\bar{y} = 0$, also $y' = y$. $\quad (z = x - y\,!)$ ∎

Also Für $x \in V$ $\exists!$ $y \in V_0$ mit $\|x - y\|$ minimal

Es ist $y = \sum_{i=1}^m \langle x, e_i\rangle e_i$ die Abbildung

$P: V \to V_0 : x \mapsto \sum_{i=1}^m \langle x, e_i\rangle e_i$ ist linear und heißt die Orthogonale Projektion von V auf V_0.

2.25 Das Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren

Satz: Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Vektorraum mit Skalarprodukt $\{v_1, v_2 \ldots\}$ endliche oder abzählbare Familie linear unabhängigen Vektoren. Dann gibt es ein ONS $\{e_1, e_2 \ldots\}$ in V so daß

$$\operatorname{lin}\{v_1, v_2 \ldots v_k\} = \operatorname{lin}\{e_1, e_2 \ldots e_k\} \quad \forall k \geq 1 \quad (k \leq \dim V)$$

Beweis: (konstruktiv, wichtig)

(1) Sei $e_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|}$

(2) Sei $f_2 := v_2 - \langle v_2, e_1\rangle e_1$ $\quad e_2 = \frac{f_2}{\|f_2\|}$ dann $e_2 \perp e_1, v_1$ (vgl. 2.24)

(3) Sei $e_1 \ldots e_{k-1}$ schon konstruiert $(\operatorname{lin}\{v_1 \ldots v_{k-1}\} = \operatorname{lin}\{e_1 \ldots e_{k-1}\})$

dann $v_k \notin \operatorname{lin}\{e_1 \ldots e_{k-1}\}$

Setze $f_k := v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle v_k, e_i\rangle e_i$, $\quad f_k \neq 0$ $\quad f_k \perp \operatorname{lin}\{e_1 \ldots e_{k-1}\}$ 2.24!

$e_k := \frac{f_k}{\|f_k\|}$ ∎

Folgerung: Ist $\dim V < \infty$, so besitzt V ONB und jedes ONS läßt sich zu ONB ergänzen.