Lineare Algebra

Der Gegenstand der linearen Algebra sind Vektoren, Mengen von Vektoren (= Vektorräume) und lineare Abbildungen.

1. Grundlegendes zu Vektoren & Motivation

1.1 Was sind Vektoren?

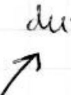
1. Antwort: Vektoren sind Objekte $\vec{x}$, die eine Richtung im Raum und eine Länge besitzen: "Pfeile", "Richtungsvektoren", "freie Vektoren".

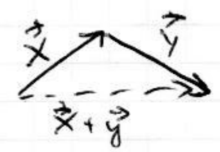
Beispiele: Kräfte, Geschwindigkeiten, (Magnet-)felder, Wellenvektoren, Verschiebungen im Raum.

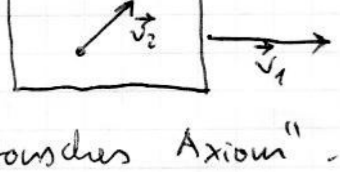
Richtungsvektoren kann man

i) Mit einer Zahl (Skalar) multiplizieren, d.h., verlängern, verkürzen, umdrehen.

ii) Addieren durch Aneinanderhängen:

$\vec{x}$ =  $\vec{y}$ = 

$\vec{x} + \vec{y}$ = 

z.B. bei Geschwindigkeiten 

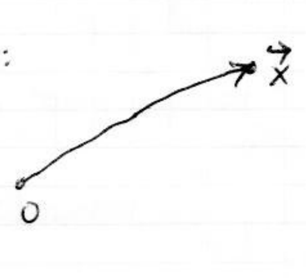
Kräften "0-tes Newtonsches Axiom" ...
1-tes

1687 Newton: Lex quarta Superpositionsprinzip: Kräfte addieren sich wie Vektoren.

1.2 Was sind Vektoren?

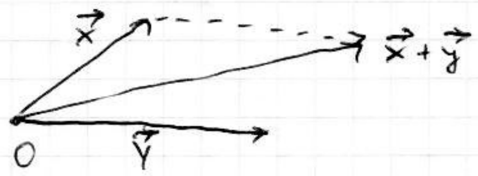
2. Antwort: Vektoren sind Punkte im Raum relativ zu einem "Nullpunkt" = "Ortsvektoren"

symbolisiert:



Ortsvektoren kann man

i) Mit einer Zahl (Skalar) multiplizieren
ii) Addieren:

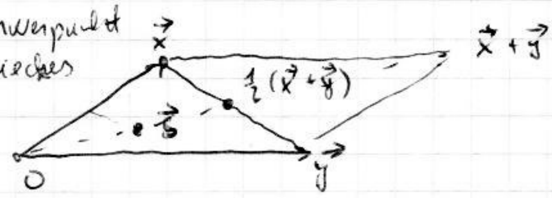


Beispiele: • Im Ort $\vec{x}$ Masse m_1

Im Ort $\vec{y}$ Masse m_2

$\Rightarrow$ Schwerpunkt: $\vec{S} = \dfrac{m_1\vec{x} + m_2\vec{y}}{m_1+m_2}$

Beispiel • Schwerpunkt eines Dreieckes — Massen $\frac{1}{3}$ auf jedem Eckpunkt



$$\vec{S} = \frac{1}{3}\vec{0} + \frac{1}{3}\vec{x} + \frac{1}{3}\vec{y} = \frac{1}{3}(\vec{x}+\vec{y}) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y}\right)$$

Beispiel • Sei T eine Drehung des Raums um O

dann gilt: i) $T(\lambda\vec{x}) = \lambda T(\vec{x})$

und ii) $T(\vec{x}+\vec{y}) = T(\vec{x}) + T(\vec{y})$

1.3 Was sind Vektoren?

3. Antwort: Vektoren sind Elemente in $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$, also n-Tupel von Zahlen $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ $x_i \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$

"Koordinatenvektoren"

Koordinatenvektoren kann man

i) Mit einer Zahl λ (Skalar) multiplizieren

$$\lambda \cdot \vec{x} = \lambda(x_1, \dots x_n) := (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$$

ii) Addieren: $(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) := (x_1+y_1, \dots, x_n+y_n)$

Beispiel: Koordinaten in Ebene E_2, Koordinaten in E_3 Raum

Beispiel: Legierungen:

Zwei Substanzen haben spezifische Gewichte g_1, g_2
und spezifische Wärme c_1, c_2

Mischung im Verhältnis $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0 \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1$

ergibt eine Substanz mit dem

spez. Gew: $g = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2$

spez. Wärme: $c = \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2$

Wie muß man für vorgeg. g und c mischen?

$\rightsquigarrow$ lineare Gleichungssystem

N.B.: Die Abbildung

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2) \mapsto (g, c) \quad \text{erfüllt}$$

i) $T(\lambda\vec{\alpha}) = \lambda T(\vec{\alpha})$

ii) $T(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = T(\vec{\alpha}) + T(\vec{\beta})$

Unser Problem: Finde $\vec{\alpha}$ mit $T(\alpha) = (g, c)$

<u>Beispiel:</u> Teilchen auf den Punkten

$$\underset{1}{\circ} \quad \underset{2}{\circ} \quad \underset{3}{\circ} \quad \underset{4}{\circ} \quad \underset{5}{\circ}$$

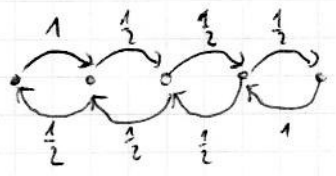
Springt nach jeder Sekunde zu einem Nachbarn,

und zwar von

$\underset{2}{\circ} \quad \underset{3}{\circ} \quad \underset{4}{\circ}$ mit je Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ nach links oder rechts

$\underset{1}{\circ}$ mit Wahrscheinlichkeit 1, also sicher nach rechts

$\underset{5}{\circ}$ —"— —"— —"— links



Weiß man zu Beginn den Startpunkt, so weiß man nach n Sekunden nur Wahrscheinlichkeiten $p_1, \dots, p_5$ für den Aufenthalt in $\underset{1}{\circ}, \dots, \underset{5}{\circ}$

$\vec{p} = (p_1, \dots, p_5)$ ist ein Vektor mit $p_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{5} p_i = 1$

ein <u>Wahrscheinlichkeitsvektor</u>

Ist $\vec{p} = (p_1, \dots, p_5)$ der W-Vektor z. Zeit n, so ist

$$T\vec{p} := \left(\tfrac{1}{2}p_2,\ p_1 + \tfrac{1}{2}p_3,\ \tfrac{1}{2}p_2 + \tfrac{1}{2}p_4,\ \tfrac{1}{2}p_3 + p_5,\ \tfrac{1}{2}p_4\right) \text{ der W-Vektor}$$

zur Zeit $n+1$.

N.B. Die Abbildung $T: \vec{p} \mapsto T(\vec{p})$ erfüllt

ii) $T(\vec{p}+\vec{q}) = T(\vec{p}) + T(\vec{q})$

i) $T(\lambda\vec{p}) = \lambda T(\vec{p})$

Typische Fragen: Gegeben $\vec{p}$ zur Zeit n, was war der

W-Vektor eine Sekunde vorher? (Gleichungssystem)

Gibt es einen invarianten W-Vektor $\vec{p}$ mit $T\vec{p} = \vec{p}$?

(Konvergenz ...)

Bemerkung: Obiges Modell nennt man auch eine Irrfahrt (Markov-Kette)

1.4 Was sind Vektoren?

1. Antwort: Vektoren sind Objekte, die man addieren und mit einem Skalar multiplizieren kann:

Exkursion in Algebra:

Addieren von Zahlen, Vektoren
Multiplikation mit Zahlen } Operation auf einer Menge

$$\left.\begin{array}{l}(a+b)+c = a+(b+c) \text{ "} = a+b+c\text{ "}\\ (a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)\text{ "} = a\cdot b\cdot c\text{ "}\end{array}\right\} \text{Assoziativität G1}$$

$$\left.\begin{array}{l}0+a = a+0 = a\\ 1\cdot a = a\cdot 1 = a\end{array}\right\} \text{Einselement G2}$$

$$\left.\begin{array}{l}a-a = 0\\ a\cdot a^{-1} = 1\end{array}\right\} \text{Inverselement. G3}$$

Def: G eine Menge, $m: G\times G \to G$ "Multiplikation" (Addition)

- ssociativ $m(m(a,b),c) = m(a, m(b,c))$ Kurz $a\cdot b = m(a,b)$
- $\exists e \quad a\cdot e = e\cdot a = a$
- $\forall a\in G \ \exists a^{-1} \quad a\cdot a^{-1} = a^{-1}a = e$.

→ G heißt Gruppe. Falls $\forall a,b\in G \quad ab = ba$

so heißt G kommutative, oder Abelsche Gruppe.

Beispiel: $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$

Def: $(\mathbb{K},+,\cdot)$ ist eine Körper falls
$(K\setminus\{0\},\cdot)$, $(K,+)$ Abelsche Gruppen und $(a+b)c = a\cdot c + b\cdot c$ (Distributiv)

Beispiel: $(\mathbb{R},+,\cdot)$, $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ $(\mathbb{C},+,\cdot)$

Def: Ein Vektorraum über $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ oder einem Körper $\mathbb{K}$ ist eine Abelsche Gruppe $(V,+)$ versehen mit einer Skalaren Multiplikation

$$\mathbb{K}\times V \to V : (\lambda,\vec{x}) \mapsto \lambda\vec{x} \quad \text{so daß} \quad \lambda,\mu\in\mathbb{K}, \vec{x},\vec{y}\in V$$

(S1) $(\lambda+\mu)\cdot\vec{x} = \lambda\vec{x} + \mu\vec{x}$

(S2) $\lambda(\vec{x}+\vec{y}) = \lambda\vec{x} + \lambda\vec{y}$

(S3) $\lambda(\mu\cdot\vec{x}) = (\lambda\mu)\cdot\vec{x}$

(S4) $1\cdot\vec{x} = \vec{x}$

Die Elemente eines Vektorraums heißen Vektoren. Das neutrale Element der Gruppe $(V,+)$ heißt auch 0-Vektor σ.

Es ist $0\cdot\vec{v} = \sigma$, $\mu\cdot\sigma = \sigma$, $(-1)\vec{v} = -\vec{v}$ inverses Element zu $\vec{v}$

Die Gleichung $\vec{u}+\vec{x} = \vec{v}$ ist eindeutig lösbar mit $\vec{x} = \vec{v}+(-\vec{u}) = \vec{v}-\vec{u}$.

Def: Seien V, W Vektorräume.

Eine Abbildung $L: V\to W$ heißt lineare Abbildung oder linear, falls für $\vec{u},\vec{v}\in V$, $\lambda\in\mathbb{K}$ (VR-Homomorphismus)

(L1) $L(\lambda\vec{v}) = \lambda\cdot\vec{v}$

(L2) $L(\vec{u}+\vec{v}) = L(\vec{u}) + L(\vec{v})$

Falls L zusätzlich bijektiv, so heißt L auch VR-Isomorphismus. } ?]
(bijektiv: $L(x) = L(y) \Rightarrow x = y$ und $\forall w\in W\ \exists v\in V\ L(v) = w$)

Falls $W = \mathbb{K}$, so heißt L auch Linearform oder lineare Funktional

Def: Sei V K-VR, $\emptyset \neq V_0 \subseteq V$ heißt Untervektorraum von V oder (linearer Teilraum) falls gilt:

(TR1) $u\in V_0$, $\lambda\in\mathbb{K}$ $\Rightarrow \lambda u\in V_0$ (Abgeschlossen bzgl. skalarer Mult.)

(TR2) $u,v\in V_0$ $\Rightarrow u+v\in V_0$ (Abgeschlossen bzgl. Addition)

Bem: $\sigma\in V_0$, V_0 ist $\mathbb{K}$-VR.

6 **Def**: Sei V $\mathbb{K}$-VR, $v_1 \dots v_n \in V$

Falls $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ für geeignete $\lambda_i \in \mathbb{K}$

so heißt v eine <u>Linearkombination</u> der Vektoren $v_1 \dots v_n$.

In dieser abstrakten Definition sind alle vorherigen Beispiele enthalten.

Sie ermöglicht es aber auch, diejenige als Vektoren zu interpretieren, an die man vorher gar nicht gedacht hatte.

1.5 Was sind Vektoren?

<u>Noch eine Antwort</u>: Auch Funktionen kann man addieren und mit Zahlen multiplizieren:

<u>Beispiel</u>: $\mathcal{P} := \{ \text{Polynome } P: \mathbb{K} \to \mathbb{K} \}$

$\mathcal{P}_n := \{ \text{Polynome } P: \mathbb{K} \to \mathbb{K},\ \text{grad } P \le n \}$

Mit $p_1 + p_2$ und $\lambda \cdot p$ wie üblich sind $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}_n$ Vektorräume.

Ist p Polynom n-ten Grades, dann ist auch

$S_{z_0}: P \to P \quad z \mapsto P(z - z_0),\ z_0 \in \mathbb{K}$ Polynom n-ten Grades

<u>(Translation)</u>

Die Translation S_{z_0} um z_0 ist also Abbildung $S_{z_0}: \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ (oder $\mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$)

Klar ist:

$S_{z_0}(\lambda p) = \lambda S_{z_0} p$

$S_{z_0}(p_1 + p_2) = S_{z_0}(p_1) + S_{z_0}(p_2) \rightarrow$ Lineare Abbildung.

Aus der Schule wissen Sie:

Polynome kann man differenzieren: $\mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ und es gilt

$(\lambda p)' = \lambda \cdot p' \quad (p_1 + p_2)' = p_1' + p_2'$ Ist Grad $p = k \ge 1$, dann Grad $p' = k - 1$

Also: $D: \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ (oder $\mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$) ist eine lineare Abbildung.

Genauso ist die k-te Ableitung $D^k: \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ linear und ebenso der "Differentialoperator" $T: D + 2D^2 + 4D^3: \ P \mapsto P' + 2p'' + 4p'''$ etc ...

<u>Aufgabe</u>: Sei p_0 Polynom, Finde Polynom P, so dass

$p' + 2p'' + 4p''' = p_0$, d.h. löse obige <u>Differentialgleichung</u>

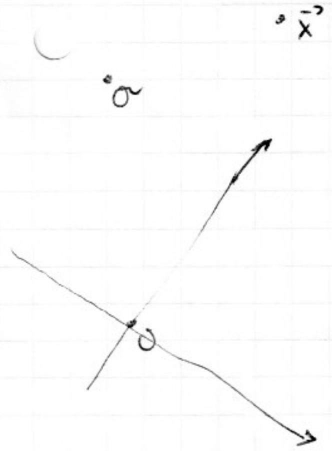
D.h. finde p mit $T(p) = p_0 \rightsquigarrow$ lineares Gleichungssystem.

Die abstrakte Definition eines VR erlaubt es, sehr verschiedene Objekte als VR zu erkennen und die Methoden und Anschauungen der lin. Algebra und Geometrie zu verwenden.

Wichtig für die Physik: Die Wellenfunktionen der Quantenmechanik sind Vektoren eines Vektorraums, genauer eines Hilbertraums.

1. Kartesische Koordinaten (Vorläufiges)

Zeichnen wir in der Ebene (Raum) einen Nullpunkt O aus so wird jeder Punkt der Ebene ein Ortsvektor. Erhalten V.R E_2, E_3



Legen wir durch O ein rechtwinkliges Koordinatensystem, so lassen sich jedem Punkt $\vec{x}$ zwei (drei) Koordinaten $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$
$(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ zuordnen.

Wir nennen x_1, x_2 (x_1, x_2, x_3) kartesische oder kanonische Koordinaten von $\vec{x}$. Umgekehrt erhält $\mathbb{R}^2 / \mathbb{R}^3$ die geometrische Interpretation einer Ebene / eines Raums.

Analog kann es nützlich sein $(x_1 \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n$ oder sogar aus $\mathbb{C}^n$ als die Koordinaten eines Ortvektors in einem abstrakten Raum aufzufassen und geometrisch zu denken. (vgl. Raum-Zeit-Kontinuum i.d. Rel. Th)

Durch die Einführung von Koordinaten werden geometrische Probleme zu analytischen / algebraischen Probleme.

Diese Idee stammt von René Descartes (lat. Cartesius)
1596 - 1650 (La Haye / Touraine - Stockholm)
La Géométrie (1637)

1.7 Parameterdarstellung von Geraden

Sei V Vektorraum, stellen wir uns vor: $V = E_2 / E_3$

Für $\vec{x} \in V$ ist $G := \{\lambda \vec{x} : \lambda \in \mathbb{K}\}$

= Menge der Punkte auf Ursprungsgerade durch $\vec{x}$

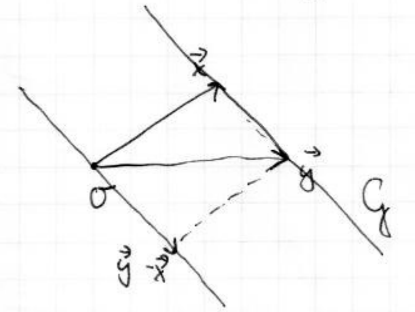
= Gerade durch $\mathcal{O}$ und $\vec{x}$

Wir behalten das "Wort" auch im allgemein bei.

Gerade durch zwei Punkte $\vec{x}$ und $\vec{y}$:

Offenbar: $\vec{y} = \vec{x} + (\vec{y} - \vec{x})$

$G = \{\vec{x} + \lambda(\vec{y} - \vec{x}) : \lambda \in \mathbb{K}\}$ = Gerade durch $\mathcal{O}$ und $(\vec{y} - \vec{x})$ verschoben durch $\vec{x}$



Verbindungsstrecke zwischen $\vec{x}$ und $\vec{y}$:

$$\{\vec{x} + \lambda(\vec{y} - \vec{x}) : 0 \le \lambda \le 1\} = \{\underbrace{(1-\lambda)\vec{x} + \lambda\vec{y}}_{\text{Konvexkombination}} : 0 \le \lambda \le 1\}$$

z. B. Mittelpunkt: $\frac{1}{2}\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y}$

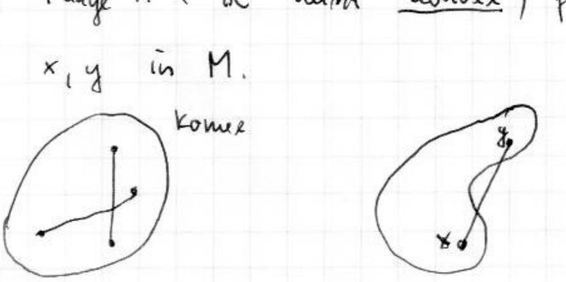
<u>Bemerkung</u>: In Koordinaten sieht das so aus (z.B.)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \quad \vec{y} = \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} \quad G = \left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R}\right\} \text{ etc.}$$

<u>Beispiel</u>: Schwerpunkt $\vec{s} = \frac{m_1\vec{x} + m_2\vec{y}}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{x} + \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{y}$

<u>Def</u>: Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt <u>konvex</u>, falls $\forall\, x, y \in M$ liegt die Verbindungsstrecke zwischen x, y in M.

z. B.



1.8 Parameterdarstellung von Ebenen

Sei $V = E_3$ (oder "größer")

Sei $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in V$, dann ist $\mathcal{E} := \{\lambda \vec{x}_1 + \mu \vec{x}_2 : \lambda, \mu \in \mathbb{K}\}$ =

= Menge der Punkte in der Ebene durch $\mathcal{O}$, $\vec{x}$ und $\vec{y}$

Ebene durch drei Punkte $\vec{x}_0, \vec{x}_1, \vec{x}_2$

$\vec{x}_1 = \vec{x}_0 + (\vec{x}_1 - \vec{x}_0) \qquad \vec{x}_2 = \vec{x}_0 + (\vec{x}_2 - \vec{x}_0)$

$\mathcal{E} = \{\vec{x}_0 + \lambda(\vec{x}_1 - \vec{x}_0) + \mu(\vec{x}_2 - \vec{x}_0) : \lambda, \mu \in \mathbb{K}\}$ = Ebene durch $\mathcal{O}$, $\vec{x}_1 - \vec{x}_0$, $\vec{x}_2 - \vec{x}_0$ verschoben mit $\vec{x}_0$

Überlegen Sie: Was ist $\{ \vec{x}_0 + \lambda(\vec{x}_1 - \vec{x}_0) + \mu(\vec{x}_2 - \vec{x}_0) : 0 \le \lambda, \mu \le 1, \lambda + \mu = 1 \}$

(Auch für beliebiges V nennen wir $\mathcal{E}$ Ebene)

1.9 Hyperebenen

Es geht gerade so weiter:

Seien $\vec{x}_1, \ldots \vec{x}_n \in V$, dann heißt

$$H_0 = \{ \lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \ldots + \lambda_n \vec{x}_n : \lambda_i \in \mathbb{K}, i = 1, 2, \ldots n \}$$

= Hyperebene durch $\vec{0}$ und $\vec{x}_1, \ldots \vec{x}_n$

$$H_1 = \{ \vec{x}_0 + \lambda_1(\vec{x}_1 - \vec{x}_0) + \ldots + \lambda_n(\vec{x}_n - \vec{x}_0) : \lambda_i \in \mathbb{K}, i = 1, 2, \ldots n \} =$$

= Hyperebene durch Punkte $\vec{x}_0, \vec{x}_1, \ldots \vec{x}_n$

N.B. $H_0 \subseteq V$ ist Untervektorraum

H_1 nicht. Man bezeichnet H_1 manchmal als <u>affine Teilraum</u>.

1.10 Wie lang ist ein Vektor? (Normen)

Antwort: Das hängt ganz von seiner Bedeutung ab:

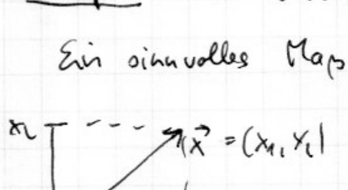
<u>Beispiel</u>: In einem Populationsmodell in n Städten

Sei $x_i \ge 0$ $i = 1, 2, \ldots n$ die Größe der Population in Stadt "i" zu einem bestimmten Zeitpunkt. Ein sinnvolles Maß für die Länge / Größe des Vektors $(x_1, x_2, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n$ könnte $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ sein.

<u>Beispiel</u>: In einer Schraubenproduktion sollen Schrauben der Länge 5 cm produziert werden. Sei l_i die wirkliche Länge der i-ten Schraube, $x_i = l_i - 5\,\text{cm}$ ihr Fehler. Ein sinnvolles Maß für die Länge/Größe des Fehlervektors $(x_1, x_2, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n$ könnte $\max\{|x_i| : 1 \le i \le n\}$ sein.

<u>Beispiel</u>: $\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ seien die Koordinaten eines Ortvektors (in E_2)

Ein sinnvolles Maß für die Länge/ Größe von $\vec{x}$ könnte $\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ sein



<u>Definition</u>: Sei V ein $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}/\mathbb{C}$) VR. Eine Abbildung $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ heißt <u>Norm</u>, falls $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V, \lambda \in \mathbb{K}$ gilt

(N1) $\|\vec{x}\| \ge 0$, $\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = 0$ (Positivität)

(N2) $\|\lambda \vec{x}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{x}\|$ (Homogenität)

(N3) $\|\vec{x} + \vec{y}\| \le \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ (Δ-Ungleichung)

<u>Bemerkung</u>: Wir interpretieren $\|\vec{x}\|$ als Länge des Vektors $\vec{x}$

und $\|\vec{x}-\vec{y}\|$ als Abstand zwischen den Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$

<u>Denn</u>: $d : V \times V \ni (\vec{x},\vec{y}) \mapsto d(\vec{x},\vec{y}) := \|\vec{x}-\vec{y}\|$ ist <u>Metrik</u> auf V

<u>Def</u>: Ist $\|\cdot\|$ Norm auf V, so heißt $\{\vec{x} \in V : \|\vec{x}\| \leq 1\}$ <u>Einheitskugel</u>

(zur Norm $\|\cdot\|$) <u>Bemerkung</u> a.) Einheitskugeln sind nicht immer rund) Ist $\|\vec{x}\| = 1$,

so heißt $\vec{x}$ ein Einheitsvektor. Ist $\vec{x} \neq 0$, so ist $\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$ Einheitsvektor

b.) Einheitskugel ist konvex.

<u>Beispiel</u>: Sei $V = \mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$

i) $\|(x_1, \dots x_n)\|_1 := |x_1| + \dots + |x_n|$ ist Norm

ii) $\|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty := \max\{|x_i| : i = 1, 2, \dots n\}$ ist Norm

iii) $\|(x_1, \dots, x_n)\|_2 := \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}$ ist Norm und heißt die Euklidische Norm

auf $\mathbb{R}^n / \mathbb{C}^n$ ((N1), (N2) sind klar, (N3) nicht ganz)

Sobald man eine Norm hat, kann man sagen was <u>Konvergenz</u> ist:

<u>Def</u>: $\lim_n x_n = x$ falls: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n > n_0 \; \|x_n - x\| < \varepsilon$

<u>1.11 Winkel</u>: Sei V $\mathbb{R}$-Vektorraum, $\vec{x}, \vec{y} \in V$

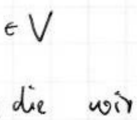
$0, \vec{x}, \vec{y}$ spannen eine Ebene auf, die wir mit der Euklidischen Ebene E_2

identifizieren wollen. Also OBdA:

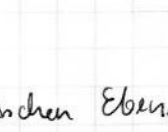
Wir definieren den (orientierten) Winkel $\sphericalangle(\vec{x}, \vec{y})$ zwischen $\vec{x}$ und $\vec{y}$

als den kleineren den Winkel von $\vec{x}$ nach $\vec{y}$ in positiver Orientierung, also

entgegen dem Uhrzeigersinn.:



$\rightsquigarrow -45° = -\frac{\pi}{4}$



$\rightsquigarrow 45° = \frac{\pi}{4}$

<u>Satz</u>: Sei $0 \neq \vec{x} = (x_1, \dots x_n)$
$0 \neq \vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$ Dann gilt

$$\cos(\sphericalangle(\vec{x}, \vec{y})) = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n}{\|\vec{x}\|_2 \cdot \|\vec{y}\|_2}$$

<u>Beweis</u>: Jänich S. 39 ∎

<u>1.12 Das Standard-Skalarprodukt</u>: Sei $V = \mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ sei für $\vec{x} = (x_1 \dots x_n)$ $\vec{y} = (y_1, \dots y_n)$

$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle := x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2 + \dots + x_n \bar{y}_n$ das Standard-Skalarprodukt zwischen $\vec{x}$ und $\vec{y}$.

Es ist also:

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = \|\vec{x}\|_2^2 \geq 0$$

$$\text{und } \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\|_2 \|\vec{y}\|_2 \cos(\sphericalangle(\vec{x}, \vec{y}))$$

Ungleichung von Cauchy-Schwartz

Insbesondere gilt $|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{x}\|_2 \|\vec{y}\|_2$ und

$|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| = \|\vec{x}\|_2 \|\vec{y}\|_2 \Leftrightarrow \vec{x}, \vec{y}$ sind parallel, d.h. $\sphericalangle(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ oder π

Das Standard-Skalarprodukt erfüllt offenbar für $\vec{x},\vec{y},\vec{z}\in V$ $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$

(SP1) $\langle \lambda\vec{x}+\mu\vec{y},\vec{z}\rangle = \lambda\langle\vec{x},\vec{z}\rangle + \mu\langle\vec{y},\vec{z}\rangle$

(SP2) $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle = \overline{\langle\vec{y},\vec{x}\rangle}$

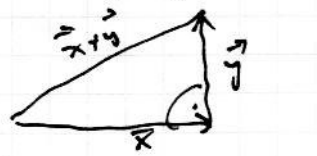
(SP3) $\langle\vec{x},\vec{x}\rangle \geq 0$, $\langle\vec{x},\vec{x}\rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{x}=0$

$\vec{x}$ und $\vec{y}$ heißen orthogonal $\Leftrightarrow \langle\vec{x},\vec{y}\rangle = 0$ (Wir schreiben $\vec{x}\perp\vec{y}$)

In diesem Fall gilt

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \langle\vec{x}+\vec{y},\vec{x}+\vec{y}\rangle = \langle\vec{x},\vec{x}\rangle + \langle\vec{x},\vec{y}\rangle + \langle\vec{y},\vec{x}\rangle + \langle\vec{y},\vec{y}\rangle =$$
$$= \langle\vec{x},\vec{x}\rangle + \langle\vec{y},\vec{y}\rangle \ldots = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$$ $\rightsquigarrow$ Satz von Pythagoras.

1.13 Zur geometrischen Interpretation des Skalarprodukts:



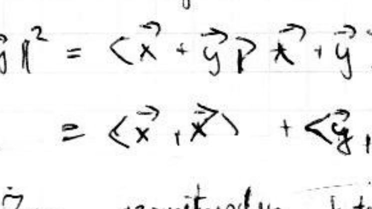
i) $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle = 0$ heißt also $\vec{x}\perp\vec{y}$

Umgekehrt in $\mathbb{R}^2$: $\vec{x}=(x_1,x_2)$ $\vec{y}:=(-x_2,x_1)$ $\Rightarrow \vec{x}\perp\vec{y}$

$\langle\vec{x},\vec{y}\rangle = x_1x_2 - x_2x_1 = 0$ und $\|\vec{y}\| = \|\vec{x}\|$ $\sphericalangle(\vec{x},\vec{y}) = 90°$

$\frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|}$ ist Einheitsvektor in dieselbe Richtung "Einheitsnormalenvektor"

ii) $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle = \alpha = \|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|\cdot\cos\varphi$ also



Sei $\|\vec{x}\|=1 \Rightarrow \langle\vec{y},\vec{x}\rangle = \|\vec{y}\|\cdot\cos\alpha$

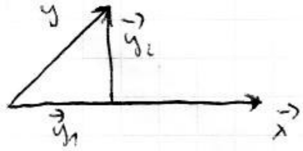
$\Rightarrow \langle\vec{y},\vec{x}\rangle\vec{x}$ = orth. Proj. von $\vec{y}$ auf $G = \{\lambda\vec{x} : \lambda\in\mathbb{K}\}$

$\|\vec{x}\|$ beliebig $\neq 0$ $\Rightarrow \frac{\langle\vec{y},\vec{x}\rangle}{\|\vec{x}\|} = \|\vec{y}\|\cdot\cos\alpha$

$$\Rightarrow \frac{\langle\vec{y},\vec{x}\rangle}{\|\vec{x}\|}\cdot\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} = \frac{\langle\vec{y},\vec{x}\rangle}{\|\vec{x}\|^2}\cdot\vec{x} =: \vec{y}_1$$

= Orthogonale Projektion von $\vec{y}$ auf

$G = \{\lambda\vec{x} : \lambda\in\mathbb{K}\}$



Sei $\vec{y}_2 := \vec{y} - \vec{y}_1 = \vec{y} - \frac{\langle \vec{y}, \vec{x} \rangle}{\|\vec{x}\|_2^2} \cdot \vec{x}$

12

Dann $\vec{y} = \vec{y}_1 + \vec{y}_2$ und $\boxed{\vec{y}_1 \parallel \vec{x}}$ und $\vec{y}_1, \vec{x} \perp \vec{y}_2$

denn $\langle \vec{y}_2, \vec{x} \rangle = \langle \vec{y} - \frac{\langle \vec{y}, \vec{x} \rangle}{\|\vec{x}\|_2^2} \vec{x}, \vec{x} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle - \frac{\langle \vec{y}, \vec{x} \rangle}{\|\vec{x}\|_2^2} \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0$

Dies ist die orthogonale Zerlegung von $\vec{y}$ längst $\vec{x}$

1.14 Nochmal Geraden und Ebenen:

Sei $0 \neq \vec{a} = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$

$G := \{ \vec{x} : \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle = 0 \}$ = Gerade durch Ursprung senkrecht zu $\vec{a}$:

Sei also $0 \neq \vec{b} \perp \vec{a}$ zB $\vec{b} = (-a_2, a_1)$

Beh: $\{ \lambda \vec{b} : \lambda \in \mathbb{R} \} = G$ $\quad \langle \lambda \vec{b}, a \rangle = 0$ ✓ $\Rightarrow$ "$\subseteq$:"

"$\supseteq$:" $\vec{x} \in G$ orthogonale Zerlegung von $\vec{x}$ längst $\vec{a}$

$\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} \quad 0 = \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle = \lambda_1 \|\vec{a}\|^2 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \Rightarrow \vec{x} = \lambda_2 \vec{b}$ ∎

Sei jetzt $\alpha \in \mathbb{R}$, $\vec{x}_0 := \alpha \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|_2^2}$ Dann $\langle \vec{x}, \vec{a} \rangle = \alpha \Leftrightarrow \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle = \langle \vec{x}_0, \vec{a} \rangle \Leftrightarrow$

$\langle \vec{x} - \vec{x}_0, \vec{a} \rangle = 0$ also ist

$G := \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 : \langle \vec{x} - \vec{x}_0, \vec{a} \rangle = 0 \} = \{ \vec{x} : \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle = \alpha \}$

Gerade mit Ursprungsvektor $\vec{b}$ verschoben durch $\vec{x}_0$.

Hesse'sche Normalform einer Gerade: $\vec{n} := \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$ Normalen Einheitsvektor in Richtung $\vec{a}$ und

man kann mit $\langle \vec{x}, \vec{a} \rangle = \alpha$ auch schreiben

$$G = \{ \vec{x} : \langle \vec{x}, \vec{n} \rangle = \frac{\alpha}{\|\vec{a}\|} \}$$

Analog in $\mathbb{R}^3$ (und $\mathbb{R}^n$):

$E := \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle = 0 \}$ ist (Hyper)ebene "durch Ursprung" senkrecht zu $\vec{a}$

$E := \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle = \alpha \} = \{$ Vektoren $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ orth. Proj auf $\vec{a}$ ist $\frac{\vec{a}\alpha}{\|\vec{a}\|_2^2} \}$

= Ebene senkrecht zu $\vec{a}$ durch $\frac{\alpha}{\|\vec{a}\|_2^2} \vec{a}$

$= \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \langle \vec{x}, \vec{n} \rangle = p \}$ mit $\vec{n} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|_2}$, $p = \frac{\alpha}{\|\vec{a}\|}$ Hesse'sche Normalform

1.15 Kanonische Basis:

In $V = \mathbb{R}^n / \mathbb{C}^n$ sei

$$\vec{e}_1 = (1, 0, \dots 0) \quad \vec{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0) \quad \dots$$

$$\vec{e}_i = (0, 0, \dots 0, \underset{i}{1}, 0 \dots, 0) \quad \underline{\text{Bem:}} \quad e_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} = \text{Dirac-Delta}$$

Ist $\vec{x} \in V$, $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$, dann ist

$$x_i = \langle \vec{x}, \vec{e}_i \rangle = x_1 e_{i1} + x_2 e_{i2} + \dots + x_n e_{in} = x_i$$

also: $$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{x}, \vec{e}_i \rangle \vec{e}_i$$

die Darstellung ist sogar eindeutig:

[denn sei: $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{e}_i \Rightarrow \alpha_i = x_i$ wegen koordinate Weise Addition]

$\vec{x}$ ist also kanonischeWeise Linearkombination der Vektoren $\vec{e}_i$, $1 \leq i \leq n$, so heißen $\vec{e}_i$ kanonische Basisvektoren und $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_n\}$ kanonische Basis von $\mathbb{R}^n / \mathbb{C}^n$

$\frac{x_i}{\|\vec{x}\|} = \cos(\sphericalangle(\vec{x}, \vec{e}_i))$ heißen die Richtungcosinus von $\vec{x}$ bzgl. der kanonischen Basis.

1.16. Orientierung:

i) Sei $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ kanonische Basis von $\mathbb{R}^2$

Bezüglich eines Nullpunkts O sei $\vec{e}_1$ ein Ortsvektor in E_2

Schaut man von O nach $\vec{e}_1$, dann sei $\vec{e}_2$ <u>links</u> von uns.

Wir sagen, das Koordinatensystem sei <u>positiv orientiert</u>.

Die Drehung von $\vec{e}_1$ nach $\vec{e}_2$ nach links definiert eine Drehsinn / Orientierung zur Winkelmessung.

ii) Sei $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ kanonische Basis von $\mathbb{R}^3$. Bzgl O sei $\vec{e}_1$ ein Ortsvektor in E_3 und $\vec{e}_2$ ein zweiter Ortsvektor $\perp$ zu $\vec{e}_1$: "$\vec{e}_2$ nach links" "$\vec{e}_3$ nach oben"

$\rightarrow$ positive Orientierung des Raums ("Rechte-Hand-Regel")

1.17 Vektoren und Linearformen

Sei $V = \mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ und $\vec{\ell} \in V$ beliebig

Setze $L: V \to \mathbb{K}$: $\vec{x} \longmapsto \langle \vec{x}, \vec{\ell} \rangle$ ist eine Linearform

$\hookrightarrow$ $\vec{\ell}$ induziert die Linearform L.

Umgekehrt sei $L: V \to \mathbb{K}$ eine Linearform, $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_n\}$ kanonische Basis

Setze $\ell_i = \overline{L(\vec{e}_i)} \in \mathbb{K}$ und $\vec{\ell} := (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n) \in \mathbb{K}^n$

Es gilt

$$L(\vec{x}) = L\left(\sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i L(\vec{e}_i) = \sum_{i=1}^n x_i \bar{\ell}_i = \langle \vec{x}, \vec{\ell} \rangle$$

also: Sei $V = \mathbb{K}^n$, dann gibt es eine 1-1 Beziehung zwischen Vektoren in V und lineare Funktionale (Linearformen) auf V — Spezialfall von Satz von Riesz-Fréchet

Der Raum $V^* := \mathcal{L}(V, \mathbb{K}) :=$ lineare Funktionale auf V ist auch selber ein Vektorraum, der sogenannte <u>Dualraum</u> von V

So identifiziert man V und V^*

<u>Bem</u>: Zur Unterscheidung nennt man oft.

Vektoren in V "Kontravariante Vektoren" oder
"Kontravariante Tensoren 1-Stufe"

Vektoren in V^* "Kovariante Vektoren" oder
"Kovariante Tensoren" 1-Stufe

<u>Bem</u>: Vektoren in V als Spaltenvektoren
Vektoren in V^* als Zeilenvektoren

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

$$L(\vec{x}) = \langle \vec{x}, \vec{\ell} \rangle = (\ell_1, \ell_2, \dots \ell_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \ell_1 + x_2 \ell_2 + \dots + x_n \ell_n$$

1.18 Multilineare Abbildungen:

Seien $V_1, \dots V_k, W$ Vektorräume über den Körper K.

Eine Abbildung $M: V_1 \times \dots \times V_k \to W$ heißt

Multilinear, k-linear, falls

$$M(\vec{x}_1, \vec{x}_2 \dots \vec{x}_{i-1}, \lambda \vec{x}_i + \vec{y}_i, \vec{x}_{i+1} \dots \vec{x}_n) = \lambda M(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_{i-1} \vec{x}_i \vec{x}_{i+1} \dots \vec{x}_n) + M(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_{i-1} \vec{y}_i, \vec{x}_{i+1} \dots \vec{x}_n)$$ gilt

für alle $\vec{x}_i, \vec{y}_i \in V$ $i = 1 \dots n$ $\forall \lambda \in K$

Für $k = 2$ heißt M bilinear

M heißt dabei symmetrisch, falls $M(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_j \dots \vec{x}_n) =$

$= M(x_1 \dots \vec{x}_j \dots \vec{x}_i \dots \vec{x}_n)$

M heißt antisymmetrisch, $M(X_1 \dots \vec{x}_i \dots \vec{x}_j \dots \vec{x}_n) = (-1) \cdot M(\vec{x}_1, \vec{x}_j \dots \vec{x}_i \dots \vec{x}_n)$

Falls $V_1 = \dots = V_n$ heißt M Produkt

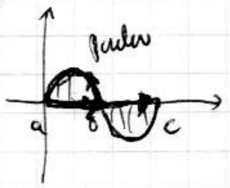
Beispiel: $M: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$

Ist $W = \mathbb{K}$, so heißt M k-Form, Tensor k-te Stufe.

1.19 Parallelogramme und Kreuzprodukt i.d. Ebene

Vorbemerkung: es gibt auch negative Flächeninhalte / Länge

wie z.B. beim Integral $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

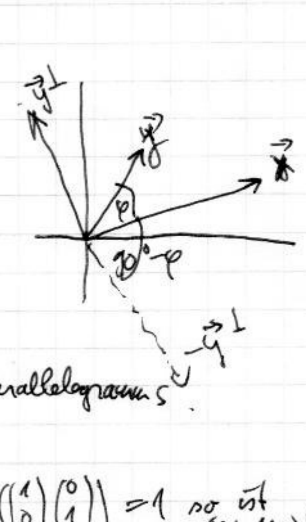


→ dann braucht man Orientierung des Raums.

Sei also E_2 euklid. Ebene mit Orientierten Koordinatensystem

$\vec{x}, \vec{y} \in E_2$ haben Koordinaten $(x_1, x_2)^T$ bzw. $(y_1, y_2)^T$ $\varphi =$ Orientierte Winkel von $\vec{x}$ nach $\vec{y}$

Setze $\vec{y}^\perp := \begin{pmatrix} -y_2 \\ y_1 \end{pmatrix}$ Dann gilt



$$x_1 y_2 - x_2 y_1 = \langle \vec{x}, -\vec{y}^\perp \rangle = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}^\perp\| \cdot \cos \sphericalangle(\vec{x}, \vec{y}^\perp) =$$

$$= \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \cos(90^\circ - \varphi) =$$

$$= \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \sin \varphi =$$

= Oberfläche des von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ aufgespannten Parallelogramms

Ergänzung: 1) $x_1 y_2 - x_2 y_1 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$ ← Determinante

2) Ist $s: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ antisymmetrisch und bilinear mit $s\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 1$ so ist $s\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \dots$

1.20 Das Vektorprodukt / Kreuzprodukt in $\mathbb{R}^3$

Für $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ definieren wir

das Vektorprodukt

$$\vec{x} \times \vec{y} := \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

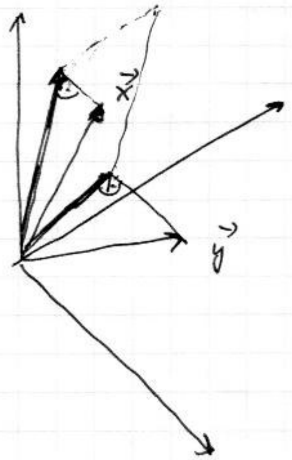
Die Koordinaten sind also orientierte Flächeninhalte der an die Koordinatenebenen projezierten, von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ aufgespannten Parallelogramms.

Wie memoriert man das:

Seien $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ kan. Basisvektoren

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

Formal $= \vec{e}_1 \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} - \vec{e}_2 \begin{vmatrix} & \end{vmatrix}$



Rechenregeln:

1) $(\vec{x} + \vec{y}) \times \vec{z} = (\vec{x} \times \vec{z}) + (\vec{y} \times \vec{z})$

$\lambda \vec{x} \times \vec{y} = \lambda (\vec{x} \times \vec{y}) = \vec{x} \times \lambda \vec{y}$

Die Abbildung $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $(x, y) \mapsto \vec{x} \times \vec{y}$ ist bilinear

2) $\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}$ also antisymmetrisch

insb. $\vec{x} \times \vec{x} = 0$

3.) Zyklische Vertauschung: $\langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{y} \times \vec{w}, \vec{x} \rangle = \langle \vec{w} \times \vec{x}, \vec{y} \rangle$

also $\langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{x} \rangle = \langle \vec{x} \times \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$

4) $\langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{u} \times \vec{v} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{u} \rangle \langle \vec{y}, \vec{v} \rangle - \langle \vec{x}, \vec{v} \rangle \langle \vec{y}, \vec{u} \rangle = \begin{vmatrix} \langle \vec{x}, \vec{u} \rangle & \langle \vec{x}, \vec{v} \rangle \\ \langle \vec{y}, \vec{u} \rangle & \langle \vec{y}, \vec{v} \rangle \end{vmatrix}$

5.) $(\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z} = \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle \vec{y} - \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle \vec{x}$

Beweis: durch Nachrechnen

Nota Bene: Wegen Bilinearität genügt es $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ als $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ zu wählen

z.B. $\langle \vec{e}_1 \times \vec{e}_2, \vec{e}_2 \rangle$ $\quad \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \langle \vec{e}_1 \times \vec{e}_2, \vec{e}_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$

Geometrische Interpretation (E_3 mit orientiertem Koordinatensystem)

i) Falls $\vec{x}, \vec{y}$ parallel sind, so ist $\vec{x} \times \vec{y} = 0$

ii) Wegen 3 $\vec{x} \times \vec{y} \perp \vec{x}$ und $\vec{x} \times \vec{y} \perp \vec{y}$ so ist $\vec{x} \times \vec{y}$ Ort. zu der Ebene aufgespannt von $\vec{x}$ und $\vec{y}$.

iii) $\|\vec{x} \times \vec{y}\|^2 = \langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle - \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2 =$

$= \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 - \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 \cos^2 \varphi =$

$= \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 \sin^2 \varphi =$ (Fläche des Parallelogramms

)

iv) $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$ im allg. gilt die Rechte-Hand-Regel.

also $\vec{x}, \vec{y}$ $\vec{x} \times \vec{y}$ sind positiv orientiert.

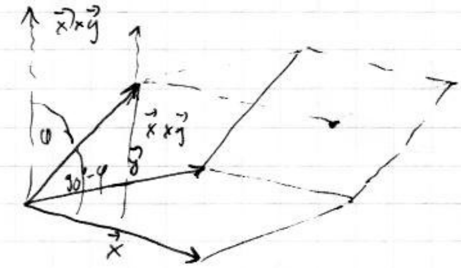
Ergänzung: Ist $s: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ bilinear und antisymmetrisch mit $s(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \vec{e}_3$ $s(\vec{e}_2, \vec{e}_3) = \vec{e}_1$ und $s(\vec{e}_3, \vec{e}_1) = \vec{e}_2$ so ist $s(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x} \times \vec{y}$

1.21 Das Spatprodukt:

Für $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ wir setzen $[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}] = \langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{z} \rangle$

Rechenregeln aus 1.20.

Interpretation = "orientiertes Volumen des von $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ aufgespannten Parallelepipeds = "Spats" $\{ \lambda\vec{x} + \mu\vec{y} + \nu\vec{z} : 0 \le \lambda, \mu, \nu \le 1 \} \subset \mathbb{R}^3$



Oder: Sei $\vec{z}$ der Geschwindigkeitsvektor eines konstanten Flusses, dann fließt durch das Parallelogramm $\vec{x}, \vec{y}$ pro Zeiteinheit das Volumen $[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]$

Ergänzungen: 1) $[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix}$

2) Ist $s: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ antisymm. trilinear mit $s(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = 1$ so ist $s(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = [\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]$

3.) Ist $s: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ bilinear und antisymm. dann existiert genau ein Vektor $\vec{z} \in \mathbb{R}^3$ sodass $s(\vec{x}, \vec{y}) = [\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]$

also s in ein Flächenelement $\vec{x}, \vec{y}$ als Parall. ein Zahl zuordnet.

1.22 Lineare Gleichungssysteme, vorläufiges

<u>Def.:</u> Ein <u>lineares Gleichungssystem</u> (LGS) ist ein System von k Gleichungen für n Unbekannte $x_1, \dots x_n$ ($\in \mathbb{K}$ Körper ($\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$)) der Form

$$(*)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = b_k \end{cases}$$

Dabei heißt $(*)$ <u>homogenes LGS</u>, falls $b_1 = b_2 = \dots = b_k = 0$, sonst <u>inhomogenes</u>. Ist $(*)$ inhomogen, so heißt das LGS mit denselben a_{ij} aber mit $b_1 = b_2 = \dots = b_k = 0$ das <u>zugehörige homogene LGS</u>

<u>Beispiele und Interpretation:</u>

1) Sei $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{k1} \end{pmatrix}, \dots \vec{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ a_{kn} \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^k$

Finde $x_1, \dots x_n \in \mathbb{K}$ so daß
$x_1\vec{a}_1 + \dots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}$ ("Berechnung der Koeffizienten einer Linearkombination")

2) $H_i := \{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n : x_1 a_{i1} + x_2 a_{i2} + \dots + x_n a_{in} = b_i \} \subseteq \mathbb{K}^n$
Hyperebene (für $i = 1 \dots k$) in $\mathbb{K}^n$. Finde $\vec{x} \in \mathbb{K}^n$ $\vec{x} \in H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_k$
("Schnittmengen von Hyperebenen")

3) Die Abbildung $A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^k : \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}x_i \\ \\ \sum_{i=1}^n a_{ki}x_i \end{pmatrix} (= A\vec{x})$
ist eine lineare Abbildung
Finde für gegebenes $\vec{b} \in \mathbb{K}^k$ ein Urbild $\vec{x} \in \mathbb{K}^n$
$A\vec{x} = \vec{b}$ ("Auflösen / invertieren von linearen Abbildungen")

1.23 Vorläufiges zur Lösung von LGS: Gaußsches Eliminationsverfahren

① Beobachtung: Falls $(*)$ von der Form

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \quad & + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \quad & + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{33}x_3 + \quad & + a_{3n}x_n = b_3 \\ & \vdots \\ a_{kk}x_k + \dots & + a_{kn}x_n = b_k \end{aligned}\right\}$$

Dann ist $(*)$ Auflösbar: Beginne von unten und setze ein.
$\Big\Updownarrow$
Also bringe $(*)$ auf diese Form!

② **Def.** Das LGS (*) hat <u>Zeilenstrukturform</u> (ZSF) falls für jede $i < j$ die j-te Zeile links mehr Nullen hat als die i-te Zeile. (oder aus lauter Nullen besteht):

$$
\begin{array}{llllll}
0 \;\dots\; 0 & a_{1i_1} x_{i_1} + \dots & & & & = b_1 \\
 & 0 & a_{2i_2} x_{i_2} & & & = b_2 \\
 & & & & & \vdots \\
 & & & & & = b_r \\
0 & \dots & & & 0 & = b_{r+1} \\
 & & & & & \vdots \\
0 & \dots & & & 0 & = b_n
\end{array}
$$

Klar ist: Falls $b_{r+1} \neq 0$ oder ... oder $b_n \neq 0$, dann gibt es keine Lösung. Andernfalls kann man das LGS auflösen.

③ **Gauß:** Bringe (*) in ein äquivalentes LGS in ZSF

i) Durch Vertauschen von Zeilen erreicht man:

- keine Zeile geht weiter nach links als die erste.

ii) Durch Addition geeigneter Vielfacher der ersten Zeilen zu den anderen Zeilen:

- Jede darunter liegende Zeile geht <u>weniger</u> weit nach links als die erste.

iii) Vergiß die erste Zeile, betrachte die zweite Zeile als erste und fahre mit i) fort.

<u>Beispiel:</u>

$$
\begin{array}{l}
x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 1 \\
x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\
x_1 + x_2 + 2x_3 = 3
\end{array}
\;\rightsquigarrow\;
\begin{array}{l}
x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 1 \\
-x_2 + 4x_3 = 1 \\
-2x_2 + 7x_3 = 2
\end{array}
\;\rightsquigarrow\;
\begin{array}{l}
x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 1 \\
-x_2 + 4x_3 = 1 \\
-x_3 = 0
\end{array}
$$

$\Rightarrow x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = -1 \Rightarrow x_1 = 4$

<u>Bemerkung:</u> Natürlich kann man durch Weglassen von x_i Schreibarbeit sparen

$\to$ "Matrizennotation"

$$
\begin{array}{l}
x_1 + x_3 = 1 \\
-x_2 = 2 \\
x_1 + x_2 + x_3 = 3
\end{array}
\;\rightsquigarrow\;
\begin{array}{l}
x_1 + x_3 = 1 \\
-x_2 = 2 \\
x_2 = 2
\end{array}
\;\rightsquigarrow\;
\begin{array}{l}
x_1 + x_3 = 1 \\
-x_2 = 2 \\
\boxed{0 = 4}
\end{array}
$$

leider geht nicht!