H31 $\dim V = n$

i) P Projektion, d.h. $P = \sum_{i=1}^{m} \langle \cdot, e_i \rangle e_i$ für $e_1, \dots e_n$ ONB.

$$P(x) = \sum_{i=1}^{m} \langle x, e_i \rangle e_i .$$

$$P(P(x)) = P\left(\sum_{i=1}^{m} \langle x, e_i \rangle e_i\right) = \sum_{i=1}^{m} P(\langle x, e_i \rangle e_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \langle x, e_i \rangle P(e_i) = \sum_{i=1}^{m} \langle x, e_i \rangle \delta_{ij} \cdot e_j$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \langle x, e_i \rangle e_i$$

2

$$\Rightarrow P^2 = P.$$

ii) Sei $\|x\| \leq 1$, $\dim V = n$, $e_1, \dots e_n$ ONB, OBdA. $P = \sum_{i=1}^{m} \langle \cdot, e_i \rangle e_i$, $m \leq n$.

$$\| P(x) \| = \left\| \sum_{i=1}^{m} \langle x, e_i \rangle e_i \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{m} x_i e_i \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \langle x_i, x_i \rangle}$$

$$\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \langle x_i, x_i \rangle} = \|x\| = 1$$

2

wähle jetzt $x = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{i=1}^{m} e_i \Rightarrow \|x\| = 1$.

$$P(x) = \sum_{i=1}^{m} \langle x, e_i \rangle e_i = \sum_{i=1}^{m} \left\langle \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{j=1}^{m} e_j, e_i \right\rangle e_i$$

$$= \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{i=1}^{m} \left\langle \sum_{j=1}^{m} e_j, e_i \right\rangle e_i = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{i,j} \delta_{ij} e_i = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{i=1}^{m} e_i$$

$$\| P(x) \| = \langle P(x), P(x) \rangle = \frac{1}{m} \cdot m = 1.$$

2

$$\Rightarrow \sup_{x \in \|1\|} \| P(x) \| = 1.$$

iii) Sei wieder $\dim V = n$, $e_1, \dots e_m$ ONB

$$P = \sum_{i=1}^{m} \langle \; , e_i \rangle e_i$$

$$\mathbb{1} = \sum_{i=1}^{n} \langle \; , e_i \rangle e_i$$

$$(\mathbb{1} - P)(x) = \mathbb{1}(x) - P(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i - \sum_{i=1}^{m} \langle x, e_i \rangle e_i$$

$$= \sum_{i=m+1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i \qquad 1$$

$\Rightarrow$ $\mathbb{1} - P$ ist orthogonale Projektion.

iv)

$$P = \sum_{i=1}^{m} \langle \; , e_i \rangle e_i$$

$$\Rightarrow \ker P = \left\{ \sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i e_i : \lambda_i \in \mathbb{K} \right\}$$

$$\mathbb{1} - P = \sum_{i=m+1}^{n} \langle \; , e_i \rangle e_i$$

$$\Rightarrow \operatorname{Bild}(\mathbb{1} - P) = \left\{ \sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i e_i : \lambda_i \in \mathbb{K} \right\} \qquad 1$$

$$\Rightarrow \ker P = \operatorname{Bild}(\mathbb{1} - P)$$

$$\operatorname{Bild}(P) = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i : \lambda_i \in \mathbb{K} \right\}$$

$$\ker(\mathbb{1} - P) = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i : \lambda_i \in \mathbb{K} \right\}$$

1

$$\Rightarrow \operatorname{Bild} P = \ker(\mathbb{1} - P).$$

v)

$\dim V = \dim \text{Bild } P + \dim \text{kern } P$

$= \dim \text{Bild} P + \dim \text{Bild}(\mathbb{1} - P)$

1

$\Rightarrow \text{lin}\,(P(V), (\mathbb{1} - P)(V)) = V$

Angenommen: $\exists x \neq 0$ mit $x \in P(V)$ und $x \in (\mathbb{1}-P)(V)$.

$\Rightarrow \quad x = \sum_{i=1}^{m} x_i e_i$ und $x = \sum_{i=m+1}^{n} x_i e_i$

1

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} x_i e_i - \sum_{i=m+1}^{n} x_i e_i = 0$, die e_i sind aber linear unabhängig (ONB). $\Rightarrow x_i = 0$; $i = 1, \dots, n$. $\lightning$

#26

$\Rightarrow \quad V = P(V) \oplus (\mathbb{1} - P)(V)$