G22/H28

i) Sei $\dim V = k$, $\dim W = n$.

$\Rightarrow$ Wähle Basis $e_1, \dots e_k$ in V und Basis $f_1, \dots f_n$ in W.

und definiere 1

$f: V \to W$, $e_i \mapsto f_i$ $i = 1, \dots k$.

$\Rightarrow$ f ist linear und injektiv.

Linear: Nachrechnen!

injektiv: $\ker(f) = \{0\}$ 1

ii) Sei $f: V \to W$ linear, $f \not\equiv 0$

zz.: f ist injektiv.

<u>Annahme</u>: f ist nicht injektiv, $x \neq y \Rightarrow f(x) = f(y)$.

$\Rightarrow f(x-y) = f(x) - f(y) = 0$.

$\Rightarrow (x-y) \in \ker f$. (1)

Aber $\ker f$ ist linearer Teilraum von V.

$\Rightarrow \dim \ker f \leq 1$.

wegen $(x-y) \in \ker f$ Basisvektor von $\ker f$. (1)

$\to$ $\mathrm{Bild}(f) = 0$. ϟ

iii) Sei $\dim V < \infty$, $\dim W < \infty$.

Sei $f: V \to W$ injektiv, aber nicht surjektiv.

injektiv $\Rightarrow \dim V = \dim \mathrm{Bild}\, f$. (1/2)

nicht surjektiv $\Rightarrow \exists\, y \in W$, sodaß für kein $x \in V$ gilt $f(x) = y$.

$\Rightarrow$ das gilt dann auch für $\mathrm{lin}\{y\}$.

$\dim(\mathrm{lin}\{y\}) = 1$ (1/2)

$\Rightarrow \mathrm{Bild}(f) \subseteq W \setminus \mathrm{lin}\{y\}$

$\dim V = \dim \mathrm{Bild}(f) \leq \dim W \setminus \mathrm{lin}\{y\} < \dim W$. (1)

Für den allgemeinen Fall suchen wir ein Gegenbeispiel:

Betrachte zB: $c := \{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_i \in \mathbb{R}, \lim_{n\to\infty} a_n < \infty \}$. und

die Abbildung

$S: c \to c$, $(a_1, \ldots) \mapsto (0, a_1, \ldots)$

den sog. Rechts-Shift.

$\Rightarrow \ker S = \{(0, \dots)\}$ $\Rightarrow$ S ist injektiv.

Aber S ist nicht surjektiv, **da** z.B. $(1,0,0 \dots) \notin Bild(S)$.

Trotzdem gilt <u>nicht</u> $\dim c < \dim c$.

iv) Sei $\dim V = \dim W < \infty$.

z.z.: Jede injektive lineare Abbildung ist surjektiv.

Angenommen: f injektiv, linear nicht surjektiv (1)

$\overset{(iii)}{\Rightarrow}$ $\dim V < \dim W$ ↯.

Im Allgemeinen stimmt diese Aussage nicht:

Betrachte wieder den Rechts-Shift auf c.

diese ist injektiv, linear aber nicht bijektiv.

v)

Beweis durch Widerspruch:

Angenommen: es existiert keine injektive lineare Abbildung $V \to W$ und $\dim V \leq \dim W$.

„$\leq$": Dann existiert nach i) eine injektive lineare Abbildung (Koordinatenabbildung. ↯

(1)