H27

Für $V = \mathbb{R}^n$ mit Standard-Skalarprodukt gilt die Ungleichung nach Blatt 1 G3.

$x, y \in \mathbb{R}^n$ (1)

$$|\langle x,y\rangle| = |\sum_{i=1}^{n} x_i y_i|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) = \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$$

Sei nun V ein beliebiger endlich dimensionaler VR. ($\dim V = n$)

Wir wählen eine ONB $b_1, \dots b_n$.

Mittels der Koordinatenabbildung:

$$K : V \longrightarrow \mathbb{R}^n : K(b_i) = e_i$$ (1)

bilden wir V nach $\mathbb{R}^n$ ab.

(Bem.: Die Koordinatenabbildung definiert bzgl. einer ONB ist ein isometrischer Isomorphismus).

$\xi, \eta \in V$

$$\Rightarrow \langle \xi,\eta\rangle_V = \langle K(\xi), K(\eta)\rangle_{\mathbb{R}^n} \leq \langle K(\xi), K(\xi)\rangle_{\mathbb{R}^n} \langle K(\eta), K(\xi)\rangle_{\mathbb{R}^n}$$

$$= \langle \xi,\xi\rangle_V \langle \eta,\eta\rangle_V .$$ (2)

(1)

$$= \|\xi\| \cdot \|\eta\|$$

$\sum_{H27} = 5$