H20

i) wähle $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$, ..., $b_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. (1)

Beh: $b_1, \ldots, b_n$ ist eine Basis von $\mathbb{C}^n$ über $\mathbb{C}$. $\Rightarrow$ $\underline{\underline{\dim \mathbb{C}^n = n}}$.

1.) linear unabh. : klar ✓

2.) $\langle b_1, \ldots b_n \rangle = \mathbb{C}^n$: (1)

Sei $c \in \mathbb{C}^n$, dh. $c = (c_1, \ldots c_n)$, $c_i \in \mathbb{C}$.

Dann gilt $c = c_1 \cdot b_1 + \cdots c_n \cdot b_n$ ✓.

ii) wähle $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, ..., $b_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

und $c_1 = \begin{pmatrix} i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $c_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, ..., $c_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ i \end{pmatrix}$.

Beh: $b_1, \ldots b_n, c_1, \ldots c_n$ ist eine Basis von $\mathbb{C}^n$ über $\mathbb{R}$.

1.) linear unabh.:

$b_1, \ldots b_n$ sind linear unabh. wie in i)

ebenso die $c_1, \ldots c_n$.

ferner kann es keine $\lambda_1, \ldots \lambda_{2n} \in \mathbb{R}$ (!) ungleich null geben,

sodaß $\lambda_1 b_1 + \cdots \lambda_n b_n + \lambda_{n+1} c_1 \ldots + \lambda_{2n} c_n = 0$, (1)

da b_i reelle Einträge hat, c_i komplexe.

2.) $\langle b_1, \ldots b_n, c_1, \ldots c_n \rangle = \mathbb{C}^n$:

Sei $z \in \mathbb{C}^n$, dh. $z = (z_1, \ldots z_n) = (u_1 + iv_1, \ldots, u_n + iv_n)$.

Dann gilt $z = u_1 \cdot b_1 + v_1 \cdot c_1 + \cdots + u_n b_n + v_n \cdot c_n$.

$\Rightarrow \dim \mathbb{C}^n = 2n$. (1)