#17 — HTG – T

i) $[x^3, x^2, x, 1]$ ist ein lin. unabhängige Familie von Polynomen in $P_3(\mathbb{Q})$. Ihr Aufspann ist $P_3(\mathbb{Q})$

$\Rightarrow \dim(P_3(\mathbb{Q})) = 4$. 1

ii)

$$6x = \lambda_1 x(x-1)(x-2) + \lambda_2 (x+1)x(x-1) + \lambda_3 (x+2)(x+1)x$$

$$= \lambda_1 (x(x^2-3x+2)) + \lambda_2 (x^2-1)x + \lambda_3 (x^2+3x+2)x$$

$$6x = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)x^3 + (\lambda_3 - \lambda_1)3x^2 + (2\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3)x$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 6 \end{array} \quad \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 6 \end{array}\right) \quad 2$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{array}\right) \Rightarrow \lambda_3 = 1,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_1 = 1 \quad 1$$

iii)

1.) $P_0(0) = P_1(0) = P_2(0) = 0 \Rightarrow P_0, P_1, P_2 \in V$. 1

2.) Lineare Unabhängigkeit:

$$\lambda_1 x(x-1)(x-2) + \lambda_2 (x+1)x(x-1) + \lambda_3 (x+2)(x+1)x = 0$$

siehe i)

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0.$$

1 ✓

$\Rightarrow \dim(V) \geq 3$, wegen $V \subseteq P_3(\mathbb{Q}) \Rightarrow \dim(V) \leq 4$. 1/2

Finde jetzt ein Polynom, daß nicht in V liegt: $p(x) = 1$. 1/2

$\Rightarrow \dim(V) = 3$.

$\Rightarrow [P_0, P_1, P_2]$ ist eine Basis von V. 1

$\Sigma_{\#17} = 7$