

#15

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & a^2 & a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & a^2-2 & a-3 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & a^2-1 & a-1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\Rightarrow (a^2-1)z = a-1$$

$$\Rightarrow \text{Kritische Fälle } |a|=1, \text{ oder } a=\pm 1 \quad (1)$$

(i) Fall $a=-1$:

$$\Rightarrow 0 = -2 \quad \nexists$$

$$\Rightarrow \text{keine Lösung für } a=-1 \quad (1)$$

(ii) Fall $a=1$:

$$\Rightarrow 0=0 \Rightarrow z \in \mathbb{R} \text{ beliebig} \quad (1)$$

$$\text{Setze } z = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow 2y = z - 2 = \lambda - 2$$

$$y = \frac{\lambda - 2}{2} \quad (1)$$

$$x = 3 - 2y - 2z = 3 - (\lambda - 2) - 2\lambda = 5 - 3\lambda$$

$$\mathbb{L} = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\} \quad (\text{Gerade}) \quad (1)$$

(Gerade)

(iii) Fall $|a| \neq 1$:

$$\Rightarrow z = \frac{a-1}{a^2-1} = \frac{1}{a+1}$$

$$2y = z - 2 = \frac{1}{a+1} - 2 = -\frac{1+2a}{1+a}$$

$$y = -\frac{1+2a}{2(1+a)} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} x = 3 - 2y - 2z &= 3 + \frac{1+2a}{1+a} - \frac{2}{a+1} \\ &= \frac{2+5a}{1+a} \end{aligned}$$

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{2+5a}{1+a}, -\frac{1+2a}{2(1+a)}, \frac{1}{1+a} \end{pmatrix} \right\} \quad (1)$$

(Punkt)