H13

i) a) Sei $z \neq 1$:

$$1+z+\cdots+z^{n-1} = \frac{1-z^n}{1-z} = \frac{1-1}{1-z} = \frac{0}{1-z} = 0 \qquad 1$$

Für das erste Gleichzeichen wurde die endl. geometrische Reihe benutzt.

Sei $z=1$:

$$1+z+\cdots+z^{n-1} = \underbrace{1+\cdots+1}_{n \times \text{mal}} = n \quad ✓ \qquad 1/2$$

b) Sei $z^2 \neq 1$:

$$1+(z^1)^2+\cdots+(z^{n-1})^2 = 1+(z^2)^1+\cdots+(z^2)^{n-1} \qquad 1$$

$$= \frac{1-(z^2)^n}{1-z^2} = \frac{1-(z^n)^2}{1-z^2} = \frac{1-1}{1-z^2} = \frac{0}{1-z^2} = 0 \quad ✓$$

Sei $z^2 = 1$

$$1+1+\cdots(1)^{n-1} = \underbrace{1+\cdots 1}_{n \times \text{mal}} = n \quad ✓ \qquad 1/2$$

ii) Klar, da nach G4. $\mathbb{U}$ eine Gruppe, ansonsten über Polardarstellung $z = 1 \cdot e^{i\varphi} \Rightarrow z^k = 1^k (e^{i\varphi})^k = 1 \cdot e^{i\varphi k}$ $\Rightarrow |z^k| = |e^{i\varphi k}| = 1$. 1

iii)

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} z^k \langle x+z^k y, x+z^k y\rangle = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} z^k \langle x, x\rangle + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} z^k \langle z^k y, z^k y\rangle$$

$$+ \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} z^k \langle x, z^k y\rangle + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} z^k \langle z^k y, x\rangle .$$

1.) $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} z^k \langle x,x\rangle = \langle x,x\rangle \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \langle x,x\rangle \frac{1}{n} 0 = 0$ nach i.a). (1)

2.) $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} z^k \langle z^k y, z^k y\rangle = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} z^k z^k \langle y, z^k y\rangle = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} z^k \cdot z^k \cdot \overline{z^k}\langle y,y\rangle$

$= \frac{1}{n}\langle y,y\rangle \cdot \sum_{k=0}^{n-1} z^k \cdot |z^k|^2 = \frac{1}{n}\langle y,y\rangle \cdot \sum_{k=0}^{n-1} z^k \cdot 1 = \frac{1}{n}\langle y,y\rangle\, 0 = 0$

nach ii) und i.a). (1)

3.) $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} z^k \langle x, z^k y\rangle = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} z^k \cdot \overline{z^k}\langle x,y\rangle = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} |z^k|^2 \langle x,y\rangle$

$= \frac{1}{n}\langle x,y\rangle \sum_{k=0}^{n-1} 1 = \frac{1}{n}\langle x,y\rangle \cdot n = \langle x,y\rangle$ nach ii). (1)

4.) $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} z^k \langle z^k y, x\rangle = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} z^k \cdot z^k \langle y,x\rangle = \frac{1}{n}\langle y,x\rangle \sum_{k=0}^{n-1} (z^k)^2$

$= \frac{1}{n}\langle y,x\rangle \cdot 0 = 0$ nach i.b). (1)

$\Rightarrow$

$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} z^k \langle x + z^k y, x + z^k y\rangle = \langle x,y\rangle$ ✓