H11

zz: $x,y \in A\cap B \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda)y \in A\cap B$ für $\lambda \in (0,1)$ 1

i) Sei $x,y \in A\cap B \Rightarrow x,y \in A \wedge x \in B$

$\Rightarrow \lambda x + (1-\lambda)y = z \in A \wedge z \in B$, für $\lambda \in (0,1)$

$\Rightarrow z \in A\cap B$. $\Rightarrow A\cap B$ ist konvex. 1

zz: $A\cup B$ nicht konvex. 1

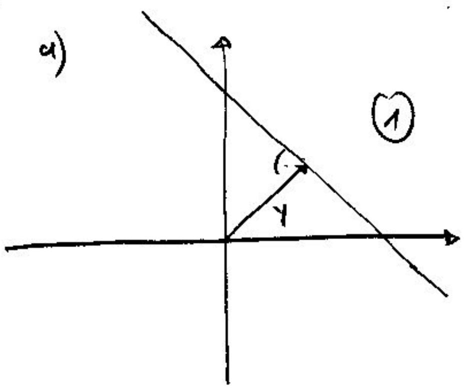
Gegenbeispiel: A, B konvex mit $A\cap B = \{\emptyset\}$

$\Rightarrow A\cup B$ nicht konvex, betrachte für $x\in A, y\in B$

$\lambda x + (1-\lambda)y$, $\lambda \in (0,1)$. 1

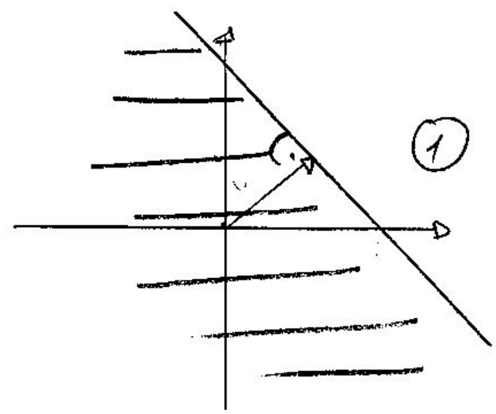
ii)

a)



1

b)



1

zz: G_y konvex.

Sei $x,z \in G_y$; Betrachte $\lambda x + (1-\lambda)z$ für $\lambda \in (0,1)$.

$\langle \lambda x + (1-\lambda)z, y\rangle = \lambda\langle x,y\rangle + (1-\lambda)\langle z,y\rangle$ 1

$= \lambda\alpha + (1-\lambda)\alpha = \alpha \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda)z \in G_y$

zz: H_y konvex.

Sei $x,z \in H_y$, Betrachte $\lambda x + (1-\lambda)z$ für $\lambda \in (0,1)$

$\langle \lambda x + (1-\lambda)z, y\rangle = \lambda\langle x,y\rangle + (1-\lambda)\langle z,y\rangle$ 1

$\leq \lambda\alpha + (1-\lambda)\alpha = \alpha \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda)z \in H_y$.

iii) Wir versuchen den Tetraeder durch geeignete Halbräume aus dem Raum zu „schneiden". Dazu bestimmen wir die Normalenvektoren zu jeder der 4 Flächen.

1.) $\vec{p}_1 - \vec{p}_4$, $\vec{p}_2 - \vec{p}_4$ sind Vektoren der ersten Fläche.

Suche $\vec{n}_1$, sodaß $\langle \vec{n}_1, \vec{p}_1 - \vec{p}_4 \rangle = \langle \vec{n}_1, \vec{p}_2 - \vec{p}_4 \rangle = 0$. (1)

$\vec{p}_1 - \vec{p}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{p}_2 - \vec{p}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Bedingung: $n_1 + n_2 - 2n_3 = n_1 - n_2 - 2n_3 = 0$

wähle $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. (1/2)

2.) $\vec{p}_2 - \vec{p}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{p}_3 - \vec{p}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

wie oben $\Rightarrow$ wähle $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. (1/2)

3.) $\vec{p}_3 - \vec{p}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{p}_1 - \vec{p}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

wie oben (1/2)

$\Rightarrow$ wähle $\vec{n}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, wichtig: erst für $\vec{p}_3 - \vec{p}_4$ wählen.
$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, dann an $\vec{p}_1 - \vec{p}_4$ anpassen.

4.) $\vec{p}_1 - \vec{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{p}_2 - \vec{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

wie oben $\Rightarrow$ wähle $\vec{n}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (1/2)

Jetzt muß man noch die Abstände der entsprechenden Fläche zum Nullpunkt bestimmen:
Wir nehmen einen Punkt der Fläche und erhalten aus dem Anteil in Richtung der jeweiligen Normalen den „Abstand".

! Vorsicht hier Abstand unnormiert !

1.) $a_1 = \langle \vec{n}_1, \vec{P}_1 \rangle = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = 2$

2.) $a_2 = \langle \vec{n}_2, \vec{P}_3 \rangle = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = 1$ ①

3.) $a_3 = \langle \vec{n}_3, \vec{P}_3 \rangle = \langle \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = 2$

4.) $a_4 = \langle \vec{n}_4, \vec{P}_3 \rangle = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = 0$ war eh klar, diese Fläche liegt in der x-y Ebene.

Jetzt erhalte ich 4 Halbräume:

$H_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \langle \vec{n}_1, x \rangle \leq 2\}$

$H_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \langle \vec{n}_2, x \rangle \leq 1\}$

$H_3 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \langle \vec{n}_3, x \rangle \leq 2\}$ ①

$H_4 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \langle \vec{n}_4, x \rangle \leq 0\}$

Das sind nach ii) konvexe Mengen. ½

Der Schnitt $\bigcap_{i=1}^{4} H_i$ ist wieder konvex und gleich ½ 1

den Tetraeder $\Rightarrow$ der Tetraeder ist konvex.