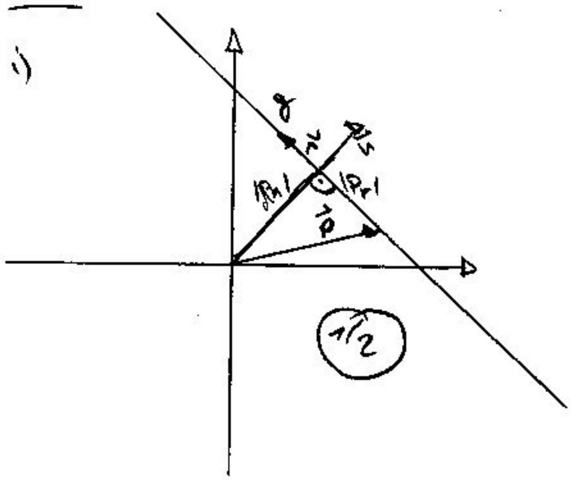
H10

i)



Anteil in $\vec r$-Richtung:

$$P_{\vec r} = \frac{\langle \vec r, \vec p \rangle}{\|\vec r\|}$$

1

Anteil in $\vec n$-Richtung:

$$P_{\vec n} = \frac{\langle \vec n, \vec p \rangle}{\|\vec n\|}$$

Die Länge von $\vec p$ ist $\|\vec p\| = \sqrt{P_{\vec r}^2 + P_{\vec n}^2}$.

Der kürzeste Abstand wird angenommen, wenn $P_{\vec r} = 0$, d.h. für $\vec p_0 = -\frac{\langle \vec r, \vec p \rangle}{\|\vec r\|} \cdot \vec r + \vec p = \frac{\langle \vec n, \vec p \rangle}{\|\vec n\|} \vec n$. (Dass $\vec p_0 \in g$ sieht man direkt aus seiner Angabe). 1

$$\Rightarrow \quad d = \|\vec p_0\| = \sqrt{P_{\vec n}^2} = |P_n|.$$

Den Betrag in $d = \left| \frac{\langle \vec n, \vec p \rangle}{\|\vec n\|} \right|$ benötige ich, da beide Richtung $\vec n$, oder $-\vec n$ frei wählbar sind; beides sind zu $\vec r$ orthogonale Vektoren. Dadurch kann $\frac{\langle \vec n, \vec p \rangle}{\|\vec n\|}$ negativ werden. Abstände sollen aber positiv sein!

ii)

ZZ: $\vec x \in g \Rightarrow \langle \frac{\vec n}{\|\vec n\|}, \vec x - \vec p \rangle = 0$

$\vec x = \lambda \cdot \vec r + \vec p$, für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ 1

$$\left\langle \frac{\vec n}{\|\vec n\|}, \lambda \cdot \vec r + \vec p - \vec p \right\rangle = \left\langle \frac{\vec n}{\|\vec n\|}, \lambda \vec r \right\rangle = \frac{\lambda}{\|\vec n\|} \langle \vec n, \vec r \rangle = 0$$

ZZ: $\vec x \in \mathbb{R}^2$, $\langle \frac{\vec n}{\|\vec n\|}, \vec x - \vec p \rangle = 0 \Rightarrow \vec x \in g$.

$\langle \frac{\vec n}{\|\vec n\|}, \vec x - \vec p \rangle = 0 \Rightarrow \vec x - \vec p \parallel \vec r$. 1/2

$\Rightarrow \vec x - \vec p = \frac{\langle \vec r, \vec x - \vec p \rangle}{\|\vec r\|} \cdot \vec r$, $\lambda_x = \frac{\langle \vec r, \vec x - \vec p \rangle}{\|\vec r\|}$ 1

$$\Rightarrow \vec x = \vec x - \vec p + \vec p = \underbrace{\lambda_x \cdot \vec r + \vec p}_{\in g} \Rightarrow \vec x \in g.$$

iii)

1.) Wähle $\vec{n}_1 = \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$. $\Rightarrow \langle \vec{n}_1, \vec{p} \rangle = \langle \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}, \vec{p} \rangle = \pm d$. (1)

2.) Falls $\langle n_1, \vec{p} \rangle = +d$, setze $\vec{n}_0 = \vec{n}_1$ (1)
falls $\langle \vec{n}_1, \vec{p} \rangle = -d$, setze $\vec{n}_0 = -\vec{n}_1$ (dann $\langle \vec{n}_0, \vec{p} \rangle = -\langle \vec{n}_1, \vec{p} \rangle = +d$.)

iv) Bestimme Richtungsvektor $\vec{r}$: (1)

$\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. , $|\vec{n}| = \sqrt{2}$

$$\Rightarrow d = \left| \frac{\langle \vec{n}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle}{|\vec{n}|} \right| = \left| \frac{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle}{\sqrt{2}} \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right| = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}}}.$$ (1/2)

Da wir Abstände zu Ursprüngen berechnen können, versuchen wir das Problem für einen beliebigen Punkt q durch verschieben des Ursprungs in den Punkt zu lösen.

$q = (2;1)$. $\rightsquigarrow$ $\vec{x} \to \vec{x} - \vec{q}$, $\vec{p} \to \vec{p} - \vec{q}$, $\vec{n} \to \vec{n}$ (1)

$$\Rightarrow d(g,q) = \left| \frac{\langle \vec{n}, \vec{p} - \vec{q} \rangle}{\|\vec{n}\|} \right| = \left| \frac{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle}{\sqrt{2}} \right| =$$

$$= \left| \frac{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle}{\sqrt{2}} \right| = \underline{\underline{\sqrt{2}}}$$ (1/2)