v) Beweis durch Induktion über n.

1) $n=1$, d.h. S_1 ✓ 1/2

2) Induktionsbehauptung:
Jede Permutation $\pi \in S_n$ läßt sich als Hintereinanderausf. von Transp. schreiben. 1/2

3.) Induktionsschritt $n \to n+1$:

Sei $\pi \in S_{n+1}$ und OBdA. $\pi(i) = k$,
Definiere Transposition $\tau := \begin{cases} \tau(k) = i \\ \tau(i) = k \\ \tau(j) = j \text{ sonst.} \end{cases}$ 1/2

Betrachte nun $\tau \circ \pi$. Es gilt $\tau \circ \pi(i) = \tau(k) = i$.
D.h. $\tau \circ \pi$ läßt i fest. 1/2

$\Rightarrow$ $\tau \circ \pi \big|_{M \setminus \{i\}} \in S_n$, d.h. die Einschränkung auf M ohne i
liegt in S_n. $\Rightarrow$ $\tau \circ \pi|_{M \setminus \{i\}}$ läßt sich als Hintereinanderausf. von Transp. auf $M \setminus \{i\}$ schreiben. 1/2

$\tau \circ \pi|_{M \setminus \{i\}} = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_l \quad (l \in \mathbb{N})$.

$\Rightarrow$ $\tau \circ \pi = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_l$ 1/2, wir betrachten hier τ_i, $i = 1, .., n$ auf natürliche Weise als $\tau_i \in S_{n+1}$

$\Rightarrow$ $\pi = \tau^{-1} \circ \tau_1 \circ \dots \tau_l$ ✓

1/2

z.z.: $\operatorname{sign}(\pi) = (-1)^l$ 1/2

durch iteriertes Anwenden von iv)

$\operatorname{sign}(\tau_l) = -1$, $\operatorname{sign}(\tau_{l-1} \circ \tau_l) = (-1)^2$, $\dots$, $\operatorname{sign}(\tau_1 \circ \dots \tau_l) = (-1)^l$.

vi)

$\pi, \sigma \in S_n$, $\pi = \tau_1 \circ \dots \tau_l$, $\sigma = \tilde{\tau}_1 \circ \dots \tilde{\tau}_k$, $(k, l \in \mathbb{N})$ 1/2

$$\operatorname{sign}(\pi \circ \sigma) = \operatorname{sign}(\tau_1 \circ \tau_l \circ \tilde{\tau}_1 \circ \dots \tilde{\tau}_k) = (-1)^{l+k}$$
$$= (-1)^l \cdot (-1)^k = \operatorname{sign}(\tau_1 \circ \dots \tau_l) \operatorname{sign}(\tilde{\tau}_1 \circ \dots \tilde{\tau}_k)$$
$$= \operatorname{sign}(\pi) \operatorname{sign}(\sigma)$$ 1/2

$\Sigma_{H7} = 19$

H8.