i) z.z.: Die Hintereinanderausf. ist abgeschlossen und assoziativ.

Abgeschl.: klar, Verkettung 2er bijektiver Abbildung ist bijektiv. ✓

Assoz.: siehe G4.ii). ✓ 1/2

z.z.: $\exists e$

Setze $e = id$, dh. $id(i) = i$ für $i \in M$. ✓ 1/2

z.z.: $\forall \pi \in S_n \ \exists \pi^{-1}: \pi \cdot \pi^{-1} = \pi^{-1} \pi = e$. 1

Bijektive Abbildung π besitzt Umkehrfkt., wähle diese als π^{-1}. ✓

ii)

Beachte die Menge der Permutation von M ist endlich.

$\Rightarrow |S_M| = N < \infty$. 1/2

Betrachte nun alle Potenzen von $\pi \in S_n$.

$\pi^0, \pi^1, \dots, \pi^N$

$\Rightarrow$ Da $|S_n| = N$ muß es zwei Potenzen i, j, $i > j$ geben,
sodaß $\pi^j = \pi^i$ (1/2)

$$\pi^{k-1} = \pi^j \, \pi^{-1} = \pi^i \cdot \pi^{-1} = \pi^{i-1}$$
$$\vdots$$
$$\pi^2 \cdot \pi^{-1} = \pi^{i-j+2} \cdot \pi^{-1} \quad (1)$$
$$\pi = \pi^{i-j+1}$$

Setze $k = i - j + 1 \Rightarrow \pi^k = \pi$.

iii)

a) $Z\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 0$ (1)

b) $Z\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = 4 + 1 + 1 + 1 = 7$ (1)

c) $Z\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{(n-1)\times mal} = n - 1$ (1)

iv)

Sei zu Anfang T die Transposition, die das i mit dem $i+1$ Element vertauscht, Sei die Inversionzahl von π, Z_π,
wende T auf π an.

$$T \circ \pi = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i & i+1 & n \\ 1 & & i+1 & i & n \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i & i+1 & \cdots & n \\ \pi(1) & \cdots & \pi(i) & \pi(i+1) & \cdots & n \end{pmatrix} \quad (1/2)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i & i+1 & \cdots & n \\ 1 & & \pi(i+1) & \pi(i) & & n \end{pmatrix}$$

Jetzt gibt es 2 Möglichkeiten:

1) $\pi(i+1) > \pi(i)$.

$\Rightarrow$ • $T \circ \pi(i) = \pi(i+1) > T \circ \pi(i+1) = \pi(i)$, d.h. $T \circ \pi(i)$ steht in $+1$ mehr in Inversion als zuvor $\pi(i)$. $(+1)$ (1/2)

• $T \circ \pi(i+1) = \pi(i) < \pi(i+1)$, d.h. $T \circ \pi(i+1)$ steht in ebensovielen in Inversion wie $\pi(i)$. (1/2)

$\Rightarrow$ Bilanz $\underline{\underline{+1}}$.

2.) $\pi(i) > \pi(i+1)$

$\Rightarrow$ • $T \circ \pi(i+1) = \pi(i) > \pi(i+1) = T \circ \pi(i)$, d.h. $T \circ \pi(i+1)$ steht in -1 weniger Inversion als zuvor $\pi(i+1)$. (-1) $\frac{1}{2}$

• $T \circ \pi(i) = \pi(i+1) < \pi(i) = T \circ \pi(i+1)$, d.h. $T \circ \pi(i)$ steht in ebenso vielen Inversion wie $\pi(i+1)$. $\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ Bilanz $= \underline{\underline{-1}}$.

<u>Zwischenüberlegung:</u>

<u>Behauptung:</u> Eine beliebige Transposition besteht aus einer ungeraden Anzahl von Nachbarvertauschungen. (1)

<u>Beweis:</u> Sei T die Transposition, die i mit j vertauscht. OBdA, $i<j$:
Um T aus Nachbarvert. zusammenzusetzen, vertauschen wir zuerst i mit $i+1$, $i+1$ mit $i+2$, ..., $j-1$ mit j.
Insgesamt haben wir $(j-i)-1$ mal vertauscht. (1)
Als nächstes müssen wir $j-1$ (vormals j) auf Position i tauschen. Das verläuft nach dem gleichen Prinzip nur in umgekehrter Richtung und liefert $((j-1)-i)-1 = (j-i)-2$ Vertauschungen. $\frac{1}{2}$
(Wir müssen 1 Platz weniger tauschen!)

$\Rightarrow$ Insgesamt haben wir jetzt $2(j-i)-3$ mal getauscht. $2(j-i)-3$ ist ungerade. ✓ $\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ mit der Behauptung folgt jetzt, daß die Inversionszahl von π sich unter T um die Summe einer ungeraden Anzahl von 1 oder -1, (1)