62 b

i) $T^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = T$

ii)

$e_1 = 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$e_3 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$e_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \left(2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$\Rightarrow \quad M_{id}^{B,B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$M_{id}^{B',B} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \qquad M_{id}^{B',B} \cdot M_{id}^{B,B'} = \mathbb{1}.$

$\uparrow b_1 \quad \uparrow b_2 \quad \uparrow b_2$

$M_T^{B',B'} = M_{id}^{B,B'} \cdot M_T^{B,B} \cdot M_{id}^{B',B}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Bzgl. der Basis B' erkennt man sofort, daß es sich bei T um eine orthog. Projektion auf den durch $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ aufgespannten linearen Teilraum handelt.
Das erklärt auch $T^2 = T$. (siehe H31)