6/8

i) zz: $M^\perp$ ist lin. Teilraum.

$M^\perp = \{x \in V : \langle x, u\rangle = 0 \ \forall u \in M\}$

1) $0 \in M^\perp$ ✓

2.) Sei $x \in M^\perp$. $\Rightarrow \langle \lambda x, u\rangle = \lambda\langle x, u\rangle = 0 \quad \forall u \in M$ ✓

3.) Sei $x, y \in M^\perp \Rightarrow \langle x+y, u\rangle = \langle x, u\rangle + \langle y, u\rangle = 0$. ✓

ii) zz: $U \subseteq W \subseteq V \Rightarrow W^\perp \subseteq U^\perp$

$\Leftrightarrow x \notin U^\perp \Rightarrow x \notin W^\perp$.

Sei also $x \notin U^\perp \Rightarrow \exists u \in U$ mit $\langle u, x\rangle \neq 0$.

aber auch $u \in W \Rightarrow x \notin W^\perp$.

iii) zz: $M \subseteq V$ Teilraum und $\dim V < \infty$

$\Rightarrow \dim V = \dim M + \dim M^\perp$

Sei $\dim V = n$, $\dim M = k$

und $b_1, \dots, b_k$ eine Orthonormalbasis von M.

Wir ergänzen sie zu einer ONB von V.

$b_1, \dots b_k, b_{k+1}, \dots b_n$.

Es gilt dann $b_i \in M^\perp$, $i = k+1, \dots n$ $(\langle b_i, b_j\rangle = \delta_{ij})$.

$\Rightarrow \text{lin}(b_{k+1}, \dots, b_n) \subseteq M^\perp$.

Wir müssen jetzt noch $M^\perp \subseteq \text{lin}(b_{k+1}, \dots b_n)$ zeigen.

Dazu $x \in M^\perp$ beliebig, $x = \sum_{i=0}^{n} x_i b_i$

$\Rightarrow \langle x, b_i\rangle = 0$, $i = 1, \dots k$.

$\Rightarrow x_i = 0$, $i = 1, \dots k$.

$\Rightarrow x = \sum_{i=k+1}^{n} x_i b_i \Rightarrow x \in \text{lin}(b_{k+1}, \dots, b_n)$

iv) <u>Zz:</u> $M \subseteq$ Teilraum und $\dim V < \infty \Rightarrow (M^\perp)^\perp = M$

Es gilt $M \subseteq (M^\perp)^\perp$.

Sei wieder $\dim V = n$, $\dim M = k$.

$$\underset{iii)}{\Longrightarrow} \quad \dim (M^\perp)^\perp = \dim V - \dim M^\perp,$$

$$\dim M^\perp = \dim V - \dim M = n-k$$

$$\Rightarrow \dim (M^\perp)^\perp = n-(n-k) = k = \dim M.$$

$$\Longrightarrow M = (M^\perp)^\perp.$$

v) <u>Zz:</u> $M \subseteq V$ Teilmenge $\Rightarrow (M^\perp)^\perp = \operatorname{lin} M$

$\operatorname{lin} M \subseteq (M^\perp)^\perp$ ist klar ✓

für die andere Richtung:

Sei $x \notin (M^\perp)^\perp$, d.h. $\langle x, u\rangle \neq 0$ für alle $u \in M^\perp$.

$\Longrightarrow x \notin \operatorname{lin} M$, da insbesondere $\langle y, u\rangle = 0$ für alle $y \in \operatorname{lin} M$, $u \in M^\perp$.

<u>51)</u> Es ~~gilt~~ $\langle v, x \rangle \cancel{= 0} \quad \forall v \in V \setminus U$.