G75

i) z.z. $[I(b_1), \dots, I(b_n)]$ sind linear unabhängig.

$\lambda_1 I(b_1) + \dots \lambda_n I(b_n) = 0$.

$= I(\lambda_1 b_1) + \dots + I(\lambda_n b_n) = I(\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n)$ 1

$\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$, da

1.) $\ker I = 0$, I ist injektiv. $(I(x) = 0 \Rightarrow x = 0)$

2.) $b_1, \dots b_n$ linear unabhängig. 1

z.z.: $\langle I(b_1), \dots I(b_n) \rangle = W$.

sei $y \in W$ beliebig.

$x := I^{-1}(y) \in V \Rightarrow x = x_1 b_1 + \dots + x_n b_n$.

$I(x) = x_1 I(b_1) \dots x_n I(b_n)$ 1

also $I(x) = I(I^{-1}(y)) = y$. $\Rightarrow \dim W = \dim V$!

1/2

ii)

z.z.: ϕ ist linear

(L1) $\phi(\lambda y) = \langle \lambda y, \cdot \rangle = \lambda \langle y, \cdot \rangle = \lambda \phi(y)$

(L2) $\phi(x+y) = \langle x+y, \cdot \rangle = \langle x, \cdot \rangle + \langle y, \cdot \rangle = \phi(x) + \phi(y)$. 1/2

(Skalarprodukt ist bilinear !!!)

zz. ϕ ist bijektiv

1.) Injektiv: $x \neq y$

Annahme: $\phi(x) = \phi(y)$

$\Rightarrow \langle x, z \rangle = \langle y, z \rangle \quad \forall z \in V$

$\Rightarrow \langle x - y, z \rangle = 0$ wähle $z = x - y$ (1)

$\Rightarrow \langle x - y, x - y \rangle = 0 \Rightarrow x - y = 0$ ↯

2.) Surjektiv:

Sei $\varphi \in (\mathbb{R}^n)^*$ beliebig. Dann existiert nach dem Darstellungssatz von Riesz-Frechet genau ein $y \in \mathbb{R}^n$ sodaß $\varphi(x) = \langle y, x \rangle$. (1/2)

ii) $[\phi(b_1), \dots, \phi(b_n)]$ ist eine Basis des $(\mathbb{R}^n)^*$. (1)

iii)

zz. $[\beta_1, \dots, \beta_n]$ linear unabhängig

$\lambda_1 \cdot \beta_1 + \cdot + \lambda_n \cdot \beta_n = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 \beta_1(x) + \dots \lambda_n \beta_n(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

also auch für $x = b_i \in V$.

$\Rightarrow \lambda_1 \beta_1(b_i) + \dots + \lambda_i \beta_i(b_i) + \dots + \lambda_n \beta_n(b_i) = 0$

$0 + \dots + \lambda_i \cdot 1 = 0$ (1)

$\Rightarrow \lambda_i = 0 \quad (i = 1, \dots n)$

$\Rightarrow [\beta_1, \dots, \beta_n]$ linear unabhängig

zz. $\langle \beta_1, \dots \beta_n \rangle = (\mathbb{R}^n)^*$.

$\varphi \in V^*$ beliebig $\Rightarrow$ wegen Riesz-Frechet existiert $y^\varphi \in V$, sodaß $\phi(y^\varphi) = \langle y^\varphi, \cdot \rangle = \varphi$.

Schreibe y^φ in der Basis $b_1, \dots b_n$.

$$y^\varphi = y_1^\varphi b_1 + \cdots y_n^\varphi b_n . \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \quad \beta_i(y^\varphi) = \beta_i(y_1^\varphi b_1) + \cdots + \beta_i(y_i^\varphi b_i) + \cdots + \beta_i(y_n^\varphi b_n)$$
$$= y_1^\varphi \beta_i(b_1) + y_i^\varphi \beta_i(b_i) + \cdots + y_n^\varphi \beta_i(b_n)$$
$$= y_i^\varphi$$

Betrachte jetzt $\varphi' = \sum_{i=1}^n y_i^\varphi \beta_i$. (1)

und vergleiche φ' mit φ auf den Basisvektoren $b_1, \dots, b_n$.

$$\varphi'(b_i) = y_i^\varphi = \langle y^\varphi, b_i \rangle = \varphi(b_i) . \qquad (1/2)$$

$\Rightarrow$ $\varphi' = \varphi$ und wir haben φ als Linearkombination der β_i angegeben

iv) Mit dem Trick aus iii') φ als Linearkombination der β_i anzugeben, haben wir das eigentlich bereits getan.

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi(b_i) \beta_i . \qquad (1)$$

Es ist hier wesentlich, daß die β_i eine duale Basis sind! Das garantiert nämlich, daß sie orthogonal sind. 1

$\sum_{H20} = 11$