<u>G14</u>

i) Setze $\phi := id : V \to V : x \to x$.

Es ist klar:

1.) ϕ ist linear

2.) ϕ ist bijektiv

ii) Setze $\psi := \phi^{-1}$ die Umkehrfunktion von ϕ.

Diese existiert, da ϕ insbesondere injektiv ist.

Es bleibt zu klären: ϕ^{-1} linear?

(L1) $\phi(\phi^{-1}(\lambda b)) = \lambda b = \lambda \phi(\phi^{-1}(b)) = \phi(\lambda \phi^{-1}(x))$

$\Rightarrow \phi^{-1}(\lambda b) = \lambda \phi^{-1}(x)$.

(L2)

$\phi(\phi^{-1}(x+y)) = x+y = \phi(\phi^{-1}(x)) + \phi(\phi^{-1}(y)) = \phi(\phi^{-1}(x) + \phi^{-1}(y))$

$\Rightarrow \phi^{-1}(x+y) = \phi^{-1}(x) + \phi^{-1}(y)$.

$\Rightarrow \phi^{-1}$ <u>bijektiv</u>

iii) Setze $\theta := \psi \circ \phi$

θ ist bijektiv, da ψ und ϕ bijektiv.

(Ausonsten: zuerst injektiv: Sei $x \neq y$

A.d.h.: $\theta(x) = \theta(y)$

$\Rightarrow \psi(\phi(x)) = \psi(\phi(y))$ da gelt aber nur, falls

$\phi(x) = \phi(y)$, oder $\psi(\phi(x)) = \psi(\phi(y))$ $\lightning$ zur Injektivität

von ϕ und ψ. $\Rightarrow \theta$ ist injektiv

Jetzt surjektiv:

Sei $z \in W$. $\Rightarrow \exists y \in V : \psi(y) = z \Rightarrow \exists x \in U : \phi(x) = y$.

$\Rightarrow \psi(\phi(x)) = z$. ✓)

„Die Hintereinanderausführung zweier linearer Abb. ist linear."

(L1) $\Theta(\lambda x) = \Psi(\phi(\lambda x)) = \Psi(\lambda \phi(x)) = \lambda \Psi(\phi(x)) = \lambda \Theta(x)$.

(L2) $\Theta(x+y) = \Psi(\phi(x) + \phi(y)) = \Psi(\phi(x)) + \Psi(\phi(y)) = \Theta(x) + \Theta(y)$.