G13

i) Sei $x \in V \Rightarrow x = x_1 b_1 + \dots + x_n b_n$

$$L(x) = L(x_1 b_1 + \dots + x_n b_n) \underset{(L2)}{=} L(x_1 b_1) + \dots + L(x_n b_n)$$

$$\underset{(L1)}{=} x_1 L(b_1) + \dots + x_n L(b_n) .$$

wir haben hier das Bild von x nur mit Hilfe der Bilder der Basisvektoren bestimmt.

$$\Rightarrow L: V \to W \quad x = (x_1, \dots x_n) \longmapsto x_1 L(b_1) + \dots + x_n L(b_n)$$

<u>Vorsicht</u>: Hier ist x allerdings bezüglich der Basis $b_1 \dots b_n$ gegeben!

ii)

$$L(x) = L(2 \cdot b_1 + 0 b_2 + 1 \cdot b_3) = 2 \cdot L(b_1) + 0 L(b_2) + L(b_3)$$

$$= 2 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Bemerkung: $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot b_1 + b_3$

iii)

$$\cancel{L(x) = \{} \quad L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 , \quad x \longmapsto \begin{pmatrix} 6x_1 + x_2 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix}$$

iv)

$$e_1 = 1/2 (b_1 + b_2) , \quad e_2 = 1/2 (b_1 - b_2) , \quad e_3 = b_2$$

$$\Rightarrow L(e_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1/2 \end{pmatrix} , \quad L(e_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1/2 \end{pmatrix} , \quad L(e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad x \longrightarrow \begin{pmatrix} 3x_1 + 3x_2 + x_3 \\ -1/2 x_1 + 1/2 x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$