69

i) Erst einmal anschaulich „Kraft" ordnet einem Vektor eine Arbeit zu, bildet also von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}$ ab. Und dies in unserem Fall linear.

Denn:

1.) $\text{Kraft}(\vec{x} + \vec{y}) = \text{Kraft}(\vec{x}) + \text{Kraft}(\vec{y})$, denn die Energie, die ich für Verrückung um $(\vec{x}+\vec{y})$ brauche, soll ja der für die Verrückung um $\vec{x}$ und dann der um $\vec{y}$ entsprechen.

2.) $\text{Kraft}(\lambda \cdot \vec{x}) = \lambda \cdot \text{Kraft}(\vec{x})$, denn die Energie, die ich für die λ-fache Strecke brauche, soll ja der λ-fachen Energie für diese Strecke entsprechen.

$\Rightarrow$ Kraft ist ein lineares Funktional.

Im homogenen Fall:

$\text{Kraft} = F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \ \vec{x} \mapsto a \cdot x_1 + a \cdot x_2 + a \cdot x_3, \ a \in \mathbb{R}.$

ii) Der Darstellungssatz von Riesz-Frechet gibt uns eine eindeutige Zuordnung zwischen den Funktionalen auf $\mathbb{R}^3$ und den Vektoren in $\mathbb{R}^3$. Jedem Funktional φ läßt sich demnach eindeutig ein Vektor $\vec{y} \in \mathbb{R}^3$ zuordnen, und zwar via: $\varphi(\vec{x}) = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$.

Wegen dieser Eindeutigkeit macht es durchaus Sinn von einem „Kraftvektor" $\vec{y}$ (bzw. $\vec{F}$) zu sprechen.

Für das Funktional F aus i) heißt das:

Es gibt $\vec{y} \in \mathbb{R}^3$, so daß:

$F(\vec{x}) = ax_1 + ax_2 + ax_3 = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle = y_1 x_1 + y_2 x_2 + y_3 x_3$

Es läßt sich leicht ablesen, daß $\vec{y} = a\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

+ Später kann man das noch etwas konkretisieren, da $\vec{\nabla}$ eigentlich nicht aus $\mathbb{R}^3$, sondern dessen Dualraum $(\mathbb{R}^3)'$ stammt, dieser ist aber zufälligerweise dem $\mathbb{R}^3$ sehr „ähnlich". Was ein Dualraum ist lernt ihr aber (vermutlich) später.