G8

i) Kandidat für den Grenzwert von $(x_n+y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist $x+y$

$$\|x_n+y_n-(x+y)\| = \|x_n-x+y_n-y\|$$
$$\leq \underbrace{\|x_n-x\|}_{\to 0} + \underbrace{\|y_n-y\|}_{\to 0} \to 0$$

✓

ii) Kandidat für Grenzwert von $(a_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist $a\cdot x$

$$\|a_n\cdot x_n - a\cdot x\| = \|a_n x_n \underbrace{-a x_n + a x_n}_{+0} - a x\|$$
$$\leq \|a_n x_n - a x_n\| + \|a x_n - a x\|$$
$$= \|(a_n-a)x_n\| + \|a(x_n-x)\|$$
$$= \underbrace{|a_n-a|}_{\to 0}\|x_n\| + |a|\underbrace{\|x_n-x\|}_{\to 0} \to 0$$

✓

iii) Kandidat für Grenzwert von $(\beta_n z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist 0.

$$\|\beta_n z_n - 0\| = |\beta_n|\,\|z_n\| \leq \underbrace{|\beta_n|}_{\to 0}\cdot M \to 0$$ z_n ist beschränkt!