G7

a) Seien $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}_n$, $\mu \in \mathbb{R}$

i) (N1) $\|\vec{x}\|_\lambda = \lambda \|\vec{x}\|_\alpha \geq 0$; $\|\vec{y}\|_\lambda = 0 \Rightarrow \lambda \|\vec{y}\|_\alpha = 0 \Rightarrow \vec{y} = 0 \quad (\lambda > 0)$ ✓

(N2) $\|\mu \vec{x}\|_\lambda = \lambda \|\mu \vec{x}\|_\alpha = \lambda |\mu| \, \|\vec{x}\|_\alpha = |\mu| \cdot \lambda \|\vec{x}\|_\alpha = |\mu| \, \|\vec{x}\|_\lambda$ ✓

(N3) $\|\vec{x} + \vec{y}\|_\lambda = \lambda \|\vec{x} + \vec{y}\|_\alpha \leq \lambda (\|\vec{x}\|_\alpha + \|\vec{y}\|_\alpha) = \lambda \|\vec{x}\|_\alpha + \lambda \|\vec{y}\|_\alpha = \|\vec{x}\|_\lambda + \|\vec{y}\|_\lambda$ ✓

ii) (N1) $\|\vec{x}\|_+ = \|\vec{x}\|_\alpha + \|\vec{x}\|_\beta \geq 0$; $\|\vec{y}\|_+ = 0 \Rightarrow \|\vec{y}\|_\alpha + \|\vec{y}\|_\beta = 0 \Rightarrow \vec{y} = 0$,

(N2) $\|\mu \vec{x}\|_+ = \|\mu \vec{x}\|_\alpha + \|\mu \vec{x}\|_\beta = |\mu| \|\vec{x}\|_\alpha + |\mu| \|\vec{x}\|_\beta = |\mu| (\|\vec{x}\|_\alpha + \|\vec{x}\|_\beta) = |\mu| \|\vec{x}\|_+$ ✓

(N3) $\|\vec{x} + \vec{y}\|_+ = \|\vec{x} + \vec{y}\|_\alpha + \|\vec{x} + \vec{y}\|_\beta \leq \|\vec{x}\|_\alpha + \|\vec{y}\|_\beta + \|\vec{x}\|_\beta + \|\vec{y}\|_\beta = \|\vec{x}\|_+ + \|\vec{y}\|_+$

(iii)

(N1) $\|\vec{x}\|_{max} = \max\{\|\vec{x}\|_\alpha, \|\vec{x}\|_\beta\} \geq 0$; $\|\vec{y}\|_{max} = 0 \Rightarrow \|\vec{y}\|_\alpha = 0 \wedge \|\vec{y}\|_\beta = 0 \Rightarrow \vec{y} = 0$ ✓

(N2) $\|\mu \vec{x}\|_{max} = \max\{\|\mu \vec{x}\|_\alpha, \|\mu \vec{x}\|_\beta\} = \max\{|\mu| \|\vec{x}\|_\alpha, |\mu| \|\vec{x}\|_\beta\}$

$= |\mu| \max\{\|\vec{x}\|_\alpha, \|\vec{x}\|_\beta\} = |\mu| \, \|\vec{x}\|_{max}$. ✓

(N3) $\|\vec{x} + \vec{y}\|_{max} = \max\{\|\vec{x} + \vec{y}\|_\alpha, \|\vec{x} + \vec{y}\|_\beta\} \leq \max\{\|\vec{x}\|_\alpha + \|\vec{y}\|_\alpha, \|\vec{x}\|_\beta + \|\vec{y}\|_\beta\}$

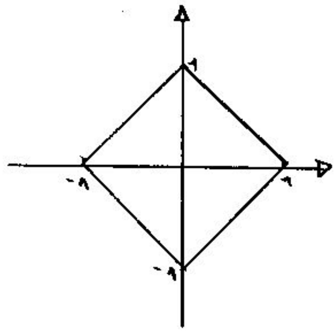
$\leq \max\{\|\vec{x}\|_\alpha, \|\vec{x}\|_\beta\} + \max\{\|\vec{y}\|_\alpha, \|\vec{y}\|_\beta\}$

$= \|\vec{x}\|_{max} + \|\vec{y}\|_{max}$

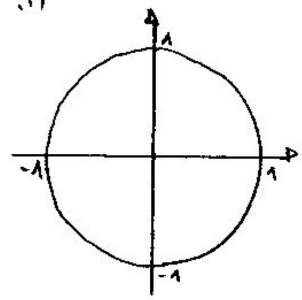
iv) Setze $\|\cdot\|_{\beta'} = \lambda \cdot \|\cdot\|_\beta$, dann folgt für $\|\cdot\|_\alpha, \|\cdot\|_{\beta'}$ aus i) und iii) das $\|\cdot\|_{\lambda max}$ Norm ist.

b.)

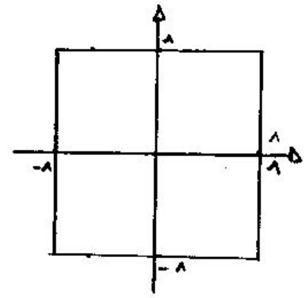
i)



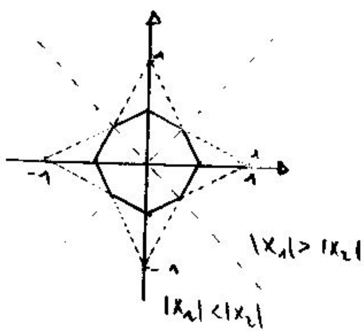
ii)



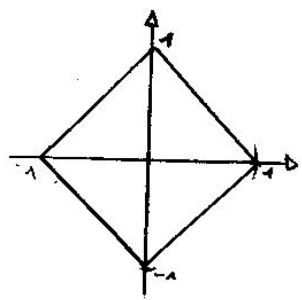
iii)



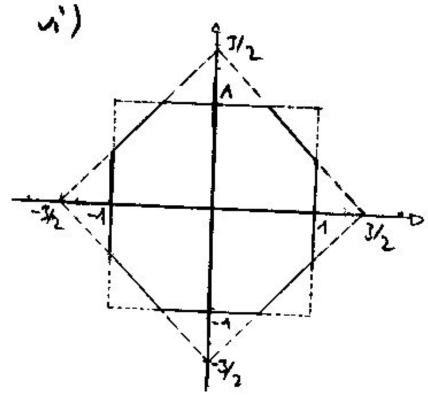
iv)



v)



vi)



zu iv)

Kann man in jedem Quadranten von Hand berechnen:

zb. $x_1 > 0,\ x_2 \le 0$:

1. Fall: $|x_1| < |x_2|$

$$\Rightarrow \|\vec{x}\|_\infty + \|\vec{x}\|_1 = |x_2| + |x_1| + |x_2| = -x_2 + x_1 + (-x_2)$$
$$= -2x_2 + x_1$$

2. Fall $|x_1| > |x_2|$

$$\|\vec{x}\|_\infty + \|\vec{x}\|_1 = |x_1| + |x_1| + |x_2| = x_1 + x_1 - x_2$$
$$= 2x_1 - x_2$$

Berechne jetzt $\|\vec{x}\|_\infty + \|\vec{x}\|_1 = 1$.

$\Rightarrow$ 1. Fall $\quad -2x_2 + x_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}$

2. Fall $\quad 2x_1 - x_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2x_1 - 1$.