G5

i) 1.) zz. $(\mathbb{F},+)$ ist eine abelsche Gruppe.

• + abgeschlossen und assoziativ. ✓

$$(a+b)+c \overset{!}{=} a+(b+c)$$

a	b	a+b
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	f

"a+b"	c	(a+b)+c
(w,f),(f,w)	f	w
(w,f),(f,w)	w	f
(w,w),(f,f)	f	f
(w,w),(f,f)	w	w

b	c	b+c
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	f

a	"b+c"	a+(b+c)
f	(w,f),(f,w)	w
w	(w,f),(f,w)	f
f	(w,w),(f,f)	f
w	(w,w),(f,f)	w

zz: $\exists\, e_+$.

Setze $e = f$ ✓ (Verweis auf Tafel)

zz: $\forall\, a \in \mathbb{F}\ \exists\, a^{-1}$ $a+a^{-1} = \quad = e$.

✓ Tafel.

2.) zz: $(\mathbb{F},\cdot)$ ist eine abelsche Gruppe.

• $\cdot$ abgeschlossen und assoziativ ✓

zz: $\exists\, e$.

Setze $e = w$, überprüfen! ✓

3.) Distributivgesetz.

$a,b,c \in \mathbb{F}$, $(a+b)\cdot c \overset{!}{=} a\cdot c + b\cdot c$

$(a+b)\wedge c \overset{!}{=} a\wedge c + b\wedge c$

für $c = f$ ist nichts zu zeigen, da stimmt es.

Bleibt $c = w$.

Jetzt Wahrheitstafel.

4.) $(\mathbb{F},+)$, $(\mathbb{F},\cdot)$ sind abelsch.

Klar $+,\cdot$ symmetrisch ✓

ii) 1.) $(\mathbb{C}(x),+)$ ist Gruppe.

zz: + abgeschlossen und ass.

Abgeschlossenheit ist klar ✓

Assoziativität: ✓ hinschreiben!

zz: $\exists\, e_+$.

Setze $e_+ = \frac{0}{1}$. ✓

zz: $\forall\, p \in \mathbb{C}(x)\ \exists\, p^{-1} : p + p^{-1} = e_+$

Setze $p^{-1}(x) := -p(x)$ ✓

2.) $(\mathbb{C}(x)\setminus\{0\},\cdot)$ ist Gruppe

zz: $\cdot$ abgeschlossen und ass.

Abge.: klar ✓

Ass.: ✓

zz: $\exists\, e$

Setze $e := \frac{1}{1}$ ✓

zz: $\forall\, p \in \mathbb{C}(x)\ \exists\, p^{-1} : p\cdot p^{-1} = e$

Setze $p^{-1} = \frac{1}{p}$ ✓

3.) Distributivgesetz:

klar ✓ Hinschreiben.

4.) $(\mathbb{C}(x),+)$, $(\mathbb{C}(x)\setminus\{0\})$ sind abelsch.

Klar $+,\cdot$ symmetrisch. ✓

iii)

1.) $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}),+)$ ist Gruppe

zz + abgeschl. und assoziativ

abgeschlossen: ✓

Assoziativ: klar ($\mathbb{Q}$ Körper)

zz: $\exists\, e_+$

$e_+ := 0 + 0\sqrt{2}$. ✓

zz: $\forall\, a \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})\ \exists\, a^{-1} : a\cdot a^{-1} = e$

Setze $a^{-1} = -a$. ✓

2.) $(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\setminus\{0\},\cdot)$ ist Gruppe.

zz: $\cdot$ abgeschl. und assoziativ

abgeschl.: ✓

assoziativ: ✓ ($\mathbb{Q}$ Körper)

zz: $\exists\, e$

$e := 1$ ✓

zz: $\exists$ Inverses.

$a \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$

$$a\cdot a^{-1} = (a_1x_1 + 2a_2x_2) + (a_1x_2 + a_2x_1)\sqrt{2} \overset{!}{=} 1$$

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow\ & a_1x_2 + a_2x_1 = 0 \\ & a_1x_1 + 2a_2x_2 = 1 \end{aligned}\right\} \quad x_1 = \frac{a_1}{a_1^2 - 2a_2^2}, \quad x_2 = -\frac{a_2}{a_1^2 - 2a_2^2}$$ ✓

3.) Distributivgesetz.

✓ nachrechnen!

4.) $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}),+)$, $(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\setminus\{0\},\cdot)$ abelsch

klar, Symmetrie, $\mathbb{Q}$ ist Körper