Dr. B. Farkas
N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2006/2007
08.02.2007

Lineare Algebra I für Physiker

8. Übungsblatt

Test-Klausur am 15.02.07, 16:15-17:45 Uhr in S311/08 - Anmeldung online bis 09.02.07

Gruppenübungen

G23 Berechne alle möglichen Produkte zwischen folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

G24 Die Quantenmechanik des Spins wird mit Hilfe der sog. "Pauli-schen Spinmatrizen"

$$s_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; s_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \; s_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

beschrieben. Rechne folgende Relationen zwischen diesen Matrizen nach:

i) $s_1^2 = s_2^2 = s_3^2 = \mathbb{1}$;

ii) $s_1 s_2 + s_2 s_1 = 0$, ebenso für alle übrigen Paare $(2,3)$ und $(3,1)$;

iii) $s_1 s_2 - s_2 s_1 = 2is_3$, ebenso für jede zyklische Vertauschung von $(1,2,3)$.

G25 Versuche eine Rechtsinverse zu folgenden Matrizen zu finden, d.h. bestimme zu einer Matrix A eine weitere A^{-1}, sodaß $AA^{-1} = \mathbb{1}$.

$$\text{i)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ii)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{iii)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

G26 Sei $\mathcal{B}$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$. Eine lineare Abbildung $T: \; \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ habe bezüglich $\mathcal{B}, \mathcal{B}$ die Matrix

$$M_T^{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

i) Zeige, daß $T^2 = T$ gilt.

ii) Eine zweite Basis des $\mathbb{R}^3$ sei durch $B' := \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ gegeben. Stelle die Basiswechselmatrix $M_{id}^{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ auf und gib die Matrix von T bezüglich $\mathcal{B}', \mathcal{B}'$ an. Kann man das Ergebnis geometrisch interpretieren?

F1 Bestimme die Abbildungsmatrizen nachfolgender Abbildungen bezüglich der angegebenen Basis des $\mathbb{R}^3$. Bestimme dazu die Matrix zuerst in einer bequemen Basis, bestimme die Basiswechselmatrix und führe dann eine Basistransformation durch.

i) 45°-Drehung gegen den Uhrzeigersinn um die Richtung $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$.

ii) Spiegelung an der Ebene durch den Nullpunkt mit Normalenvektor $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \right\}$.

F2 Betrachte in $\mathbb{R}^3$ den Vektor $v = \begin{pmatrix}6\\0\\3\end{pmatrix}$ und die lineare Abbildung

$$f:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ x \mapsto v \times x.$$

Bestimme bezüglich einer bequemen Basis $\mathcal{B}$ die Abbildungsmatrix $M_f^{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ und dann die Abbildungsmatrix bezüglich der kanonischen Basis.

F3 Sei für $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ V der $\mathbb{K}$-Vektorraum der $n \times n$ Matrizen. Zeige, daß

$$||A|| := \max_{\substack{x \in \mathbb{K}^n \\ ||x||_2 = 1}} ||Ax||_2 \quad (= \max_{x \neq 0} \frac{||Ax||_2}{||x||_2})$$

eine submultiplikative Norm auf V definiert wird; submultiplikativ bedeutet $||AB|| \leq ||A|| ||B||$ für $A, B \in V$. Diese Norm mißt die maximale Streckung der Abbildung $x \mapsto Ax$.

F4 Sei A eine $n \times n$ Matrix mit Einträgen aus $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Zeige, daß der Grenzwert

$$\lim_{k \to \infty} \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} A^j$$

bezüglich der Norm aus F3 existiert. Wir verstehen den Grenzwert als "Exponentialfunktion" einer Matrix und schreiben hierfür symbolisch auch $e^A := \lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} A^j$. Wir gehen dazu wie folgt vor:

i) Zeige zuerst, daß für $S_n := \sum_{j=0}^{n} \frac{A^j}{j!},\ n \in \mathbb{N}$ gilt

$$||S_n|| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{||A||^j}{j!} = e^{||A||}.$$

ii) Zeige nun $||S_n - S_m|| \leq \sum_{j=m}^{n} \frac{||A||^j}{j!}$ für $m, n \in \mathbb{N},\ m \leq n$. Schließe hieraus, daß $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist.

iii) Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ist $\mathbb{K}^{n\times n}$ vollständig, d.h. jede Cauchyfolge ist konvergent. Zeige, daß $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist.

F5 i) Zeige, daß eine Matrix der Form $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0 \vee b \neq 0$ stets ein Rechtsinverses besitzt, d.h. eine Matrix A^{-1} existiert, sodaß $AA^{-1} = \mathbb{1}$. Von welcher Form ist A^{-1}?

ii) Zeige, daß die Matrizen der Form $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$, bezüglich der Addition und der Multiplikation von Matrizen einen Körper bilden.

iii) Kennst du einen Körper, der dem aus ii) sehr "ähnlich" ist?