Dr. B. Farkas
N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2006/2007
25.01.2007

Lineare Algebra I für Physiker

7. Übungsblatt

Gruppenübungen

G19 Untersuche folgende Matrizen auf ihre Abbildungseigenschaften, d.h., untersuche, wie sich ein Vektor zu seinem Bild verhält. Gib die Matrix danach bezüglich einer anderen Basis als deine Sitznachbarn an und vergleiche mit ihnen.

i) $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ ii) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

G20 Bestimme die Abbildungsmatrix A aus den Bildern der kanonischen Einheitsvektoren.

i) Die Abbildungsmatrix der Spiegelung an der y-Achse im $\mathbb{R}^2$
ii) Die Abbildungsmatrix der Spiegelung an der x-Achse im $\mathbb{R}^2$
iii) Die Abbildungsmatrix der Spiegelung an der Geraden $g:\ x = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{R}$ im $\mathbb{R}^2$
iv) Die 90°-Drehung im Uzs. um den Nullpunkt in $\mathbb{R}^2$
v) Die 45°-Drehung im Uzs. um die y-Achse in $\mathbb{R}^3$

G21 Gegeben sei die Gerade $g:\ x = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{R}$, sowie das aus folgenden Punkten P, Q, R bestehende Dreieck Δ in $\mathbb{R}^2$,

$$P = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

i) Bestimme graphisch das Spiegelbild $\overline{\Delta}$ von Δ anhand einer Skizze.
ii) Bestimme die Abbildungsmatrix A dieser Abbildung.
iii) Berrechne alle Seitenlängen, alle Winkel sowie den Flächeninhalt von Δ und $\overline{\Delta}$ und vergleiche.

G22/H28 8 Punkte

Im folgenden sei $\mathbb{K}$ ein fester Körper, V und W endlich-dimensionale Vektorräume über $\mathbb{K}$. Beweise:

i) Wenn $\dim V \leq \dim W$, so gibt es eine injektive lineare Abbildung $f : V \to W$.
ii) Ist $\dim V = 1$, so ist bis auf die Nullabbildung jede lineare Abbildung $f : V \to W$ injektiv.
iii) Wenn es eine injektive, aber nicht surjektive Abbildung $f : V \to W$ gibt, so gilt $\dim V < \dim W$.
iv) Ist $\dim V = \dim W$, so ist jede injektive lineare Abbildung ein Isomorphismus, d.h., insbesondere surjektiv.
v) Gibt es keine injektive lineare Abbildung $V \to W$, so gilt $\dim V > \dim W$.

(Was bleibt auch im allgemeinen Fall gültig und was nicht?)

Hausübungen

H29 7 Punkte

Betrachte die lineare Abbildung $A:\ \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$,

$$A(x_1,x_2,x_3,x_4) = \begin{pmatrix} x_1+x_2+x_3 \\ x_1+x_4 \end{pmatrix}.$$

Bestimme

i) die Darstellungsmatrix der linearen Abbildung A bezüglich der folgenden Basen $\mathcal{P}$ von $\mathbb{R}^4$ und $\mathcal{R}$ von $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{P} = \{v_1,\dots,v_4\} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix} \right\}, \mathcal{R} = \{w_1,w_2\} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \right\},$$

ii) eine Basis für den Kern von A,

iii) eine Basis für das Bild von A.

H30 6 Punkte

i) Zeige, daß es keine lineare Abbildung $f:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ gibt mit

$$\mathrm{Bild}(f) = \mathrm{lin}\{ \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \},\ \ker f = \mathrm{lin}\{ \begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix} \}.$$

ii) Bestimme bezüglich geeigneter Basen im Bild- und Urbildraum die Matrix für eine lineare Abbildung $f:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\mathrm{Bild}(f) = \mathrm{lin}\{ \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \},\ \ker f = \mathrm{lin}\{ \begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix} \}.$$

Ist f eindeutig bestimmt?

H31 11 Punkte

Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit Skalarprodukt und $P:\ V \to V$ eine orthogonale Projektion. Zeige, daß dann gilt:

i) $P^2 = P$ (Idempotenz),

ii) $\sup_{\substack{x\in V\\ ||x||\le 1}} ||P(x)|| = 1$, falls $P \neq 0$

iii) $\mathbb{1} - P$ ist eine orthogonale Projektion,

iv) $\ker(P) = \mathrm{Bild}(\mathbb{1}-P)$ und $\mathrm{Bild}(P) = \ker(\mathbb{1}-P)$,

v) $\mathrm{lin}\{P(V), (\mathbb{1}-P)(V)\} = V$ und $P(V) \cap (\mathbb{1}-P)(V) = \{0\}$, d.h., $V = P(V) \oplus (\mathbb{1}-P)(V)$.