Dr. B. Farkas
N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2006/2007
11.01.2007

Lineare Algebra I für Physiker

6. Übungsblatt

Gruppenübungen

G16 Entscheide, ob folgende Familien von Vektoren eine Orthonormalbasis des jeweiligen Vektorraums mit Standard-Skalarprodukt bilden.

i) $\left[\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}\right], \left[\begin{pmatrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{pmatrix}\right] \quad \in \mathbb{R}^2$ ii) $\left[\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\\ \frac{-1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\right] \quad \in \mathbb{R}^3$

G17 Konstruiere Orthonormalbasen zu den durch folgende Vektoren aufgespannten Teilräumen des $\mathbb{R}^n$. Verwende hierzu das Verfahren von Gram und Schmidt.

i) $\left[\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\right]$ ii) $\left[\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\ 3\\ -1\\ -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\ 0\\ 6\\ 8\end{pmatrix}\right]$

G18 Sei V ein Vektorraum. Zeige:

i) $M \subseteq V$ Teilmenge $\quad\Rightarrow\quad M^\perp \subseteq V$ ist linearer Teilraum
ii) $U \subseteq W \subseteq V$ Teilmenge $\quad\Rightarrow\quad W^\perp \subseteq U^\perp$
iii) $M \subseteq V$ Teilraum und $\dim V < \infty \quad\Rightarrow\quad \dim V = \dim M + \dim M^\perp$
iv) $M \subseteq V$ Teilraum und $\dim V < \infty \quad\Rightarrow\quad (M^\perp)^\perp = M$
v) $M \subseteq V$ Teilmenge $\quad\Rightarrow\quad (M^\perp)^\perp = \mathrm{lin}\{M\}$.

Hausübungen

H24 5 Punkte

Sei $V = \mathbb{R}^5$ mit Standard-Skalarprodukt. Setze $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) : \ x_i \in \mathbb{R}, \ \sum_{i=1}^{5} x_i = 0\}$.

i) Konstruiere eine Orthonormalbasis für U.

ii) Bestimme $U^\perp$.

H25 5 Punkte

Definiere ein Skalarprodukt auf dem Raum der Polynome $grad \leq n$, sodaß die Basis

$$1, t, \frac{t^2}{2!}, \ldots, \frac{t^n}{n!}$$

orthonormal ist.

H26 5 Punkte

Sei V ein Vektorraum und seien V_1, V_2 zwei lineare Teilräume von V. Sei U die lineare Hülle von V_1 und V_2. Zeige, daß folgende Aussagen äquivalent sind:

i) Jedes $x \in U$ läßt sich auf genau eine Weise in der Form $x = x_1 + x_2$ mit $x_1 \in V_1$ und $x_2 \in V_2$ schreiben.

ii) Es gilt $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.

iii) Sind $x_1 \in V_1$ und $x_2 \in V_2$ beliebige von Null verschiedene Vektoren, so besitzt die Gleichung $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = 0$ nur die triviale Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Ist eine (und damit alle drei) dieser Bedingungen erfüllt, so nennt man U die "**direkte Summe**" von V_1 und V_2; man schreibt $\mathbf{U} = \mathbf{V_1} \oplus \mathbf{V_2}$.

H27 5 Punkte

Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ mit Skalarprodukt $< \cdot, \cdot >_V$. Zeige, daß dann für $x, y \in V$ folgende Ungleichung gilt:

$$| < x, y >_V | \leq ||x|| \cdot ||y||.$$

Hinweis: Verwende hierzu die Koordinatenabbildung und die Ungleichung aus G3 (korrigierte Version) unter der Annahme, daß sie für alle n-Tupel $n \in \mathbb{N}$ gilt.