Dr. B. Farkas
N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2006/2007
21.12.2006

Lineare Algebra I für Physiker

5. Übungsblatt

Gruppenübungen

G13 Seien V, W Vektorräume, $b_1, \ldots, b_n$ eine Basis von V und $L: V \to W$ eine lineare Abbildung von der nur die Bilder der Basisvektoren $L(b_1), \ldots, L(b_n)$ bekannt sind.

i) Zeige, daß die Abbildung dann bereits vollständig bekannt ist, d.h., das Bild jedes beliebigen Vektors $x \in V$ angeben werden kann.

Konkret: $V = \mathbb{R}^3$ und $W = \mathbb{R}^2$,
$b_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ und $L(b_1) = \begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}, L(b_2) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, L(b_3) = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$.

ii) Bestimme das Bild des Vektors $x = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ gegeben bzgl. b_1, b_2, b_3.

iii) Bestimme die Abbildungsvorschrift von L bezüglich der Basisvektoren b_1, b_2, b_3.

iv) Versuche nun wie in iii) die Abbildungsvorschrift bezüglich der kanonischen Basis e_1, e_2, e_3 anzugeben. Stelle hierzu die kanonischen Basisvektoren als Linearkombinationen der b_i dar.

G14 Seien U, V, W beliebige Vektorräume.

i) Überlege dir, daß es stets einen Isomorphismus $V \to V$ gibt. (Reflexivität)

ii) Sei $\phi : U \to V$ ein Isomorphismus. Zeige, daß dann auch ein Isomorphismus $\psi : V \to U$ existiert. (Symmetrie)

iii) Seien $\phi : U \to V$ und $\psi : V \to W$ Isomorphismen. Zeige, daß dann ein Isomorphismus $\theta : U \to W$ existiert. (Transivität)

Wir sehen hier, daß isomorph dem mathematischen äquivalent sehr ähnlich ist.

G15/H19 11 Punkte

i) Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum mit Basis $b_1, ..., b_n$. Sei W ein weiterer Vektorraum und $I: V \to W$ ein Vektorraumisomorphismus. Zeige, daß $I(b_1), \ldots, I(b_n)$ eine Basis von W ist. Was bedeutet das in Hinblick auf die Dimensionen von V und W?

ii) Zeige, daß die Abbildung
$$\phi: \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n)^*, \ y \mapsto < y, \cdot >$$
ein Vektorraumisomorphismus ist.

iii) Gib eine Basis des Dualraums $(\mathbb{R}^n)^*$ mit Hilfe der kanonischen Basis in $\mathbb{R}^n$ an.

iii') Sei $[\beta_1, \ldots, \beta_n]$ eine Familie von Vektoren in $(\mathbb{R}^n)*$ mit $\beta_i(e_j) = \delta_{i,j}$. Zeige, daß $\beta_1, \ldots, \beta_n$ eine Basis von $(\mathbb{R}^n)^*$ ist. Man nennt eine Basis mit dieser Eigenschaft auch duale Basis.

iv) Sei $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ein beliebiges lineares Funktional. Schreibe φ bezüglich der dualen Basis aus iii').

Hausübungen

H20 4 Punkte

Bestimme die Dimension folgender Vektorräume:

i) $\mathbb{C}^n$ über $\mathbb{C}$ ii) $\mathbb{C}^n$ über $\mathbb{R}$

(Was vermutest du im Fall: $\mathbb{C}^n$ über $\mathbb{Q}$?)

H21 5 Punkte

Geben sei eine Familie von Vektoren: $\left[\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right]$.

i) Betrachte sie einmal in $\mathbb{R}^3$ über dem Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

ii) Betrachte sie diesmal in $(\mathbb{F}_2)^3$ über dem Körper $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$ wobei

$$\mathbb{F}_2 := (\{0,1\}, +, \cdot), \quad \text{wobei} \quad \begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}.$$

Untersuche sie in beiden Fällen auf lineare Unabhängigkeit und entscheide, ob sie eine Basis sind. Modifiziere sie gegebenenfalls.

H22 7 Punkte

Entscheide für jede der nachfolgenden Verknüpfungen, ob es sich um ein Skalarprodukt handelt:

i) $< \hat{x}_1, \hat{y}_2 > := \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$ auf $V := \{\hat{x} = (x_1, x_2, \ldots) : x_i \in \mathbb{R},\ x_i \neq 0$ nur für endlich viele $i\}$

ii) Für $p_1(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$ und $p_2(x) = b_0 + b_1 x + \ldots b_n x^n$ sei

$$< p_1(x), p_2(x) > = \sum_{i \geq 0} a_i b_i,$$

wobei $a_i = 0$ bzw. $b_j = 0$ für $i \geq m$ bzw. $j \geq n$. Betrachte diese Verknüpfung auf $\mathbb{R}[x]$, dem Raum der Polynome in x mit reellwertigen Koeffizienten.

iii) Für $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_n)$

$$< x, y > := x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$$

auf $\mathbb{C}^n$.

Erkennst du die "Ähnlichkeit" von i) und ii)?

H23 4 Punkte

Welche der folgenden Familien von Vektoren sind linear unabhängig? Welche sind Basen? Ergänze für i) gegebenenfalls zu einer.

i) $[2x^3 - 2x^2 + 5x, -3x^3 + 3x^2 - x, x^3 - 18x^2 + 23x] \in P_3(\mathbb{R})$ ii) $[1, \sin^2(x), \cos(2x)] \in C(\mathbb{R})$

Bem.: $C(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ stetig}\}$

Wir wünschen euch erholsame Feiertage und ein gutes Neues Jahr!