Dr. B. Farkas
N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2006/2007
07.12.2006

Lineare Algebra I für Physiker

4. Übungsblatt

Gruppenübungen

G10 Sei folgendes lineare Gleichungssystem für n Unbekannte $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ gegeben:

$$\begin{array}{llll} a_{11}x_1 & + \ldots + & a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k1}x_1 & + \ldots + & a_{kn}x_n & = b_k \ . \end{array}$$

Die Abbildung $A: \ \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^k$ sei definiert durch: $\vec{x} \mapsto \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{ki}x_i \end{pmatrix}$.

i) Zeige, daß für $b_1 = \ldots = b_k = 0$ $\vec{x}$ genau dann eine Lösung des LGS ist, wenn $A\vec{x} = 0$. Man kann hierfür auch schreiben $\vec{x} \in \ker(A) := \{\vec{y} \in \mathbb{K}^n : \ A\vec{y} = 0\}$.

ii) Sei nun $\vec{x}_0 \in \ker(A)$ und $\vec{x}_b$ eine beliebige Lösung des LGS. Zeige, daß auch $\vec{x} = \lambda\vec{x}_0 + \vec{x}_b$ eine Lösung des LGS ist. Die Lösungen des LGS sind daher ein affiner Teilraum (warum?) und lassen sich auf folgende Weise charakterisieren:

$$\mathbb{L} := \{\lambda\vec{x_0} + \vec{x}_b : \ \lambda \in \mathbb{K}, \, \vec{x}_0 \in \ker(A), \, A\vec{x}_b = \vec{b}\}.$$

Wir bezeichnen $\mathbb{L}$ als Lösungsraum.

G11 Berechne die Lösungen folgender linearen Gleichungssysteme

$$\begin{array}{llllll} x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & +4x_2 & +6x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & +6x_2 & +9x_3 & = & 0 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{llllll} x_1 & & +2x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & +x_2 & +3x_3 & = & 5 \ . \end{array}$$

Bestimme jeweils die Dimension des Lösungsraumes und gebe den Lösungsraum an.

G12 Welche der folgenden Familien von Vektoren sind linear unabhängig? Welche sind Basen? Ergänze für $i) - iv)$ gegebenenfalls zu einer.

i) $\left[\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\5\\3\end{pmatrix}\right] \in \mathbb{R}^3$ ii) $\left[\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right] \in \mathbb{R}^3$ iii) $\left[\begin{pmatrix}\pi\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\\pi\end{pmatrix}\right] \in \mathbb{R}^2$

iv) $\left[x^2 - 1, x + 1, x - 1, 1\right] \in P_3(\mathbb{Q})$ v) $[\sin(x), \cos(x), \cos(x)\sin(x)] \in C(\mathbb{R})$

Hinweis: $P_3(\mathbb{Q}) := \{p : \ \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} : \ p \text{ ist Polynom}, \ \operatorname{grad}(p) \leq 3\}$

Hausübungen

H14 7 Punkte

Betrachte den reellen Vektorraum $\mathbb{R}^4$ und in diesem den linearen Teilraum U, der durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \quad \text{und} \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

bestimmt wird. Sei W der lineare Teilraum des $\mathbb{R}^4$ der durch die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ aufgespannt wird.

i) Bestimme eine Basis für den Teilraum $U \cap W$.

ii) Bestimme eine Basis für den Teilraum $U + W := \{u + w : \ u \in U, \ w \in W\}$.

H15 9 Punkte

Bestimme die Lösungsmenge des linearen Gleichungssytems

$$\begin{array}{cccc} x_1 & +2x_2 & +2x_3 & = 3 \\ & 2x_2 & -1x_3 & = -2 \\ x_1 & +4x_2 & +\alpha^2 x_3 & = \alpha \end{array}$$

in Abhängigkeit vom reellen Parameter α.

H16 4 Punkte

Betrachte $V := \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ als Vektorraum über dem Körper $\mathbb{Q}$. Untersuche folgende Vektoren auf linearer Unabhängigkeit:

i) 10 und $14 + \sqrt{2}$ ii) $6 + \sqrt{8}$ und $3 + \sqrt{2}$ iii) 5 und $7 + \sqrt{32}\sqrt{2}$

H17 7 Punkte

Betrachte im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $P_3(\mathbb{Q})$ der Polynome vom Grad ≤ 3 mit Koeffizienten aus $\mathbb{Q}$, den Untervektorraum $V := \{p : \ p(0) = 0\}$, sowie die Polynome

$p_0 := x(x-1)(x-2), \quad p_1 := (x+1)x(x-1), \quad p_2 := (x+2)(x+1)x.$

i) Bestimme die Dimension von $P_3(\mathbb{Q})$.

ii) Stelle das Polynom $6x$ als Linearkombination von p_0, p_1 und p_2 dar.

iii) Zeige, daß die Polynome p_0, p_1, p_2 eine Basis von V bilden. Hinweis: Bestimme hierzu die Dimension von V.

H18 5 Punkte

Seien $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$.

i) Zeige, daß

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = < \vec{x} \times \vec{y}, \vec{z} > .$$

ii) Zeige, daß

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} z_1 - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} z_2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} z_3.$$

Wir haben hier die Determinante nach der letzten Spalte entwickelt. Kann man auch nach der ersten oder der zweiten Spalte entwickeln? Gib eine Begründung an. Du darfst hier die Regeln des Spatprodukts unbewiesen verwenden.