Dr. B. Farkas
N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2006/2007
23.11.2006

Lineare Algebra I für Physiker

3. Übungsblatt

Gruppenübungen

G11 a) Seien $||\cdot||_\alpha$ und $||\cdot||_\beta$ Normen auf $\mathbb{R}^n$. Zeige, daß dann auch

i) $||\cdot||_\lambda := \lambda||\cdot||_\alpha\,,\ \lambda \in \mathbb{R}^+\backslash\{0\}$ ii) $||\cdot||_+ := ||\cdot||_\alpha + ||\cdot||_\beta$ iii) $||\cdot||_{max} := \max\{||\cdot||_\alpha, ||\cdot||_\beta\}$

iv) $||\cdot||_{\lambda max} := \max\{||\cdot||_\alpha, \lambda||\cdot||_\beta\},\ \lambda \in \mathbb{R}^+\backslash\{0\}$

Normen sind.

b) Zeichne die Einheitskugeln folgender Normen im $\mathbb{R}^2$:

i) $||\cdot||_1$ ii) $||\cdot||_2$ iii) $||\cdot||_\infty$ iv) $||\cdot||_1 + ||\cdot||_\infty$ v) $\max\{||\cdot||_1, ||\cdot||_2\}$

vi) $\max\{\frac{2}{3}||\cdot||_1, ||\cdot||_\infty\}$

G9 Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen von Vektoren in $\mathbb{R}^n$, die bezüglich der euklidischen Norm auf dem $\mathbb{R}^n$ gegen einen Vektor x bzw. y konvergieren, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge beschränkter Vektoren, d.h., es existiert ein $M \in \mathbb{R}$, sodaß $||z_n||_2 \leq M\ \forall n$, $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} \alpha_i = \alpha$ und $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}, \beta_i \in \mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} \beta_i = 0$. Zeige, daß dann auch folgende Folgen bezüglich der euklidischen Norm konvergieren, und gib ihren Grenzwert an.

i) $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ii) $(\alpha_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iii) $(\beta_n z_n)_{n\in\mathbb{N}}$

G10 Bewegen wir ein Testteilchen und müssen dafür Energie aufbringen, d.h., Arbeit verrichten, sagen wir, es wirke eine Kraft F auf das Teilchen. Nimm der Einfachheit halber an, es herrschen homogene Bedingungen, d.h., wir müssen in jeder Raumrichtung die gleiche Arbeit für die gleiche Strecke verrichten.

i) Schreibe mathematisch korrekt und genau auf, um was für ein Objekt es sich bei "Kraft" handelt. Überlege hierbei, welche Eigenschaften "Kraft" besitzen sollte, um der physikalischen Wirklichkeit gerecht zu werden.

ii) Was rechtfertigt die Annahme, Kraft ist Vektor, mathematisch? Erläutere dies. Setze deine Erklärung für das Objekt aus i) um.

iii)* Halte deine Augen während deines Physikstudiums offen nach Objekten, die von der gleichen Bauart wie "Kraft" sind.

Hausübungen

H10 10 Punkte

i) Seien g eine Gerade in $\mathbb{R}^2$ mit Ursprungsvektor $\vec{r}$, $\vec{n}$ ein zu $\vec{r}$ orthogonaler Vektor und $\vec{p} \in g$. Zeige, daß sich der Abstand einer Geraden zum Nullpunkt mittels $d = |\frac{<\vec{n},\vec{p}>}{||\vec{n}||}|$ bestimmen läßt. Zerlege $\vec{p}$ in seine Anteile bezüglich $\vec{r}$ und $\vec{n}$ und fertige eine Skizze an.

ii) Sei $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$. Zeige, daß $\vec{x} \in g$ genau dann, wenn der Zerlegungsanteil von $\vec{x}$ bezüglich $\vec{n}$ $\frac{<\vec{n},\vec{p}>}{||\vec{n}||}$ beträgt, d.h. $\vec{x}$ die Gleichung $< \frac{\vec{n}}{||\vec{n}||}, \vec{x} - \vec{p} >= 0$ bzw. $< \frac{\vec{n}}{||\vec{n}||}, \vec{x} >=< \frac{\vec{n}}{||\vec{n}||}, \vec{p} >$ erfüllt.

iii) Zeige, daß stets ein zu $\vec{r}$ orthogonaler Verktor $\vec{n}_0$ existiert, für den gilt:

$$< \vec{n}_0, \vec{x} >= d \quad \text{für alle } \vec{x} \text{ auf der Geraden.}$$

Diese Form der Charakterisierung der Gerade g heißt Hesse-Normalform.

iv) Sei g die Gerade durch die Punkte $(0,1)$ und $(1,0)$. Bestimme den Abstand zum Nullpunkt sowie zum Punkt $(2,1)$. Erweitere hierzu die Überlegungen aus i).

H11 14 Punkte

i) Seien A, $B \in \mathbb{R}^n$ konvexe Mengen. Entscheide, ob auch ihr Schnitt $A \cap B$ und ihre Vereinigung $A \cup B$ konvexe Mengen sind.

ii) Betrachte in $\mathbb{R}^n$ mit Standard-Skalarprodukt folgende Mengen

a) $G_y := \{x \in \mathbb{R}^n : < x, y >= \alpha\}, \ y \in \mathbb{R}^n, \ \alpha \in \mathbb{R}$

b) $H_y := \{x \in \mathbb{R}^n : < x, y > \leq \alpha\}, \ y \in \mathbb{R}^n, \ \alpha \in \mathbb{R}.$

Skizziere beide und zeige, daß sie konvex sind. Man bezeichnet H_y auch als Halbraum.

iii) Zeige, daß der Tetraeder mit den Eckpunkten $p_1 = (1,1,0)$, $p_2 = (1,-1,0)$, $p_3 = (0,-1,0)$ und $p_4 = (0,0,2)$ konvex ist. Versuche hierbei den Tetraeder geeignet durch eine Anzahl von Halbräumen zu beschreiben.

H12 4 Punkte

Entscheide in jedem der nachfolgenden Fälle, ob es sich um eine lineare Abbildung handelt.

i) $p: \ \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \ x \mapsto p(x), \ \text{wobei } p \in \ P(\mathbb{C})$

ii) $\hat{x}: \ Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \ f \mapsto f(x), \ x \in \mathbb{R}$

iii) $\overline{t}: \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \ v \mapsto v + t, \ \text{wobei } t \in \mathbb{R}^n$ (Translation)

iv) $\overline{h}: \ Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \ f(x) \mapsto f(x+h), \ \text{wobei } h \in \mathbb{R}$

H13 8 Punkte

Sei $z \in \mathbb{U} := (\{x \in \mathbb{C} : \ |x| = 1\}, \cdot)$ mit $z^n = 1$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

i) Zeige, daß dann gilt:

a) $$1 + z + \ldots + z^{n-1} = \begin{cases} 0 & \text{für } z \neq 1 \\ n & \text{für } z = 1 \end{cases}$$

b) $$1 + (z^1)^2 + \ldots + (z^{n-1})^2 = \begin{cases} 0 & \text{für } z^2 \neq 1 \\ n & \text{für } z^2 = 1 \end{cases} \quad \text{falls } n \geq 3.$$

Hinweis: Verwende hier die geometrische Reihe.

ii) Zeige, daß $|z^k| = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

iii) Zeige nun, daß für $x, y \in \mathbb{C}^m$, falls $z^2 \neq 1$ und $n \geq 3$, gilt:

$$< x, y >= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} z^k < x + z^k y, x + z^k y > .$$

Erläuterung: Das Bemerkenswerte an dieser Indentität ist, daß sie uns erlauben wird, das Skalarprodukt zweier beliebiger Elemente und damit jedes lineare Funktional (siehe Darstellungssatz) als Skalarprodukt zweier "gleicher" Elemente (sog. Diagonalelemente) zu schreiben. Man findet Spezialfälle ($z^4 = 1$) unter dem Namen Polarisierungsindentität. Im Zusammenhang mit Bilinearformen gewinnt sie an Bedeutung.