Dr. B. Farkas
N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2006/2007
09.11.2006

Lineare Algebra I für Physiker

2. Übungsblatt

Gruppenübungen

G4 Seien G und H Gruppen, S eine beliebige Menge, $\bar{a} := \{b \in \mathbb{Z} : b \mod m \equiv a\}$ und $Z_m := \{\bar{a} : a \in \mathbb{Z}\}$. Entscheide in jedem der nachfolgenden Fälle, ob es sich um eine Gruppe handelt.

i) $Abb(S, G) := \{f : S \to G\}$ mit punktweiser Multiplikation

ii) $Abb(S, S) := \{f : S \to S\}$ mit Verkettung $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

iii) $G \times H := \{(x, y) : x \in G, y \in H\}$ mit der Verknüpfung $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2, y_1y_2)$

iv) $\mathbb{Z}_4$ mit der Verknüpfung $\bar{a} + \bar{b} := \overline{a + b}$

v) $(\mathbb{Z}_{13}, \cdot)$ mit der Verknüpfung $\bar{a} \cdot \bar{b} := \overline{ab}$

vi) $(\mathbb{C}, \oplus)$ wobei $z \oplus w := |z + w|$

vii) $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ mit der Multiplikation auf $\mathbb{C}$

Hinweis: Verwende in v), falls $a, b \in \mathbb{Z}$ teilerfremd$\Rightarrow$ dann existieren $k, m \in \mathbb{Z}$, sodaß $ka + mb = 1$.

G5 Entscheide in jedem der nachfolgenden Fälle, ob es sich um einen Körper handelt.

i) $(\mathbb{F} := \{w, f\}, +, \cdot)$ mit den Verknüpfungen

$$a \cdot b := a \wedge b \qquad a + b := (a \wedge \neg b) \vee (b \wedge \neg a).$$

ii) $\mathbb{C}(x) := \{r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} : p(x), q(x) \in P(\mathbb{C}),\ q(x) \neq 0\}$ mit den Verknüpfungen

$$\frac{p_1(x)}{q_1(x)} + \frac{p_2(x)}{q_2(x)} := \frac{p_1(x)q_2(x) + p_2(x)q_1(x)}{q_1(x)q_2(x)} \quad \text{und} \quad \frac{p_1(x)}{q_1(x)} \cdot \frac{p_2(x)}{q_2(x)} := \frac{p_1(x)p_2(x)}{q_1(x)q_2(x)}$$

iii) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{a + b\sqrt{2} :\ a, b \in \mathbb{Q}\}$ mit den Verknüpfungen

$$(a_1 + a_2\sqrt{2}) + (b_1 + b_2\sqrt{2}) := (a_1 + b_1) + (b_1 + b_2)\sqrt{2} \quad \text{und}$$
$$(a_1 + a_2\sqrt{2}) \cdot (b_1 + b_2\sqrt{2}) := (a_1b_1 + 2a_2b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{2}$$

G6 a) Sei X eine Menge und $Abb(X) := \{f : X \to \mathbb{K}\}$ die Menge aller Abbildungen von X nach $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Zeige: $Abb(X)$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ bezüglich der Addition $(f + g)(x) := f(x) + g(x),\ \forall x \in X$ und der Skalarmultiplikation $(\lambda f)(x) := \lambda f(x),\ \forall x \in X,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$.

b) Entscheide, ob es sich bei folgenden Teilmengen des $Abb(\mathbb{C})$ um einen Vektorraum über $\mathbb{C}$ handelt.

i) $P(\mathbb{C}) := \{p : \mathbb{C} \to \mathbb{C} :\ p \text{ ist ein Polynom}\}$ ii) $P^0(\mathbb{C}) := \{p \in P(\mathbb{C}) : p(0) = 0\}$
iii) $P^1(\mathbb{C}) := \{p \in P(\mathbb{C}) : p(0) = 1\}$ iv) $P_n(\mathbb{C}) := \{p \in P(\mathbb{C}) : Grad\, p \leq n\},\ (n \in \mathbb{N})$

c) Entscheide, ob es sich in den nachfolgenden Fällen um Vektorräume handelt.

i) $c := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_i \in \mathbb{R},\ \lim_{n\to\infty} a_n < \infty\}$ mit gliedweiser Addition

ii) $c_1 := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_i \in \mathbb{R},\ \lim_{n\to\infty} a_n = 1\}$ mit gliedweiser Addition

iii) $\mathbb{K}$ über $\mathbb{K}$

Hausübungen

H6 3 Punkte

Sei G eine Gruppe. Zeige:

i) Sind $a, b, c \in G$ mit $ac = bc$ oder $ca = cb$, dann gilt $a = b$ (Kürzungsregel).

ii) $a_r^{-1} \in G$ ist genau dann Rechtsinverses ($aa_r^{-1} = e$) zu $a \in G$, wenn es auch Linksinverses ($a_l^{-1}a = e$) ist, d.h. $a_r^{-1} = a_l^{-1}$.

H7 19 Punkte

Sei M eine Menge mit n Elementen, $n \in \mathbb{N}$. Eine Permutation der n Elemente ist eine bijektive Abbildung $\pi : M \to M$. Numeriert man die Elemente von M, so gehört zu jeder Permutation von M eine Permutation der Zahlen $\{1, \ldots, n\}$, die ebenfalls durch π bezeichnet werden soll. Man notiert eine Permutation auch folgendermaßen:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & & \pi(n) \end{pmatrix};$$

so bedeutet z.B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ diejenigen Permutation einer dreielementigen Menge, die das erste Element vertauscht. Die Menge aller Permutationen von n Elementen heißt S_n:

$$S_n := \{\pi : M \to M \ : \pi \text{ ist bijektiv}\}.$$

i) Beweise: S_n ist mit der Hintereinanderausführung von Permutationen als Verknüpfung eine Gruppe. Ist die Gruppe kommutativ?

iii) Zeige, dass für jedes $\pi \in S_n$ ein $k \in \mathbb{N}$ existiert, sodaß $\pi^k = \pi$.

Sei $\pi \in S_n$ eine Permutation. Gilt für beliebige $1 \leq i < k \leq n \, : \, \pi(i) > \pi(k)$, so sagt man: $\pi(i)$ und $\pi(k)$ stehen in "Inversion". Die Zahl Z der Inversionen ist für jede Permutation π eindeutig festgelegt. So hat z.B. $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ $Z = 4 + 2 + 1 + 1 = 8$ Inversionen. Man definfiert das Vorzeichen $\text{sign}(\pi)$ einer Permutation π durch $\text{sign}(\pi) = (-1)^Z$.

iii) Gib die Zahl der Inversionen und das Vorzeichen folgender Permutationen an:
i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ ii) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ iii) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \ldots & n & 1 \end{pmatrix}$ $(n \in \mathbb{N})$

iv) Eine Permutation, bei der lediglich zwei Elemente vertauscht werden, heißt Transposition. Zeige: Wird eine Transposition $\tau \in S_n$ mit einer beliebigen Permutation $\pi \in S_n$ verknüpft, so unterscheidet sich die Zahl der Inversionen in $\tau \circ \pi$ gegenüber der in π um eine ungerade Zahl. Was bedeutet das für das Vorzeichen von $\text{sign}(\tau \circ \pi)$?

Hinweis: Betrachte zuerst den Fall, bei dem zwei benachbarte Elemente vertauscht werden, und zerlege eine beliebige Transposition in Nachbarvertauschungen!

v) Begründe, warum jede Permutation $\pi \in S_n$ als Hintereinanderausführung von Transpositionen geschrieben werden kann: $\pi = \tau_1 \circ \ldots \circ \tau_l$ $(l \in \mathbb{N})$. Zeige: $\text{sign}(\pi) = (-1)^l$.

Hinweis: Verwende vollständige Induktion.

vi) Zeige: Sind $\pi, \sigma \in S_n$, so gilt:

$$\text{sign}(\pi \circ \sigma) = \text{sign}(\pi)\text{sign}(\sigma).$$

H8 (Nicht jeder Vektorraum ist $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$) 5 Punkte

Seien M eine beliebige Menge, $\mathcal{P}(\mathcal{M}) := \{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}\}$ ihre Potenzmenge, d.h., die Menge all ihrer Teilmengen und $\mathbb{F}$ der Körper aus Aufgabe G5.i). Finde eine geeignete Skalarmultiplikation, daß $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ zusammen mit der symmetrischen Differenz von Mengen $\Delta(A, B) = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$ zu einem Vektorraum über $\mathbb{F}$ wird.

H9 5 Punkte

Betrachte den gezeichneten, in z-Richtung gestreckten Oktaeder. Gib alle Drehungen im Raum an, durch die der Oktaeder in sich übergeht. Eine Drehung soll dabei durch die zugehörige Permutation der numerierten Ecken dargestellt werden. Zeige , daß die Menge dieser "Drehsymmetrien" des Oktaeders eine Gruppe bildet. Gib zwei Drehungen (=Permutationen) an, aus denen sich alle anderen durch Hintereinanderausführung erzeugen lassen.

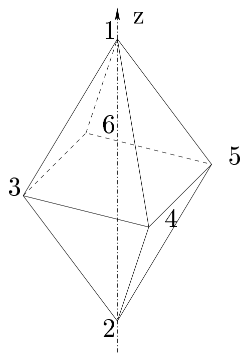

Abbildung 1: